



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Anisotrope materialer

*symmetri, stivhed og styrke*

Rathkjen, Arne

*Publication date:*  
1980

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Rathkjen, A. (1980). *Anisotrope materialer: symmetri, stivhed og styrke*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. Ren og Anvendt Mekanik Nr. 8013

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



A. RATHKJEN

**ANISOTROPE MATERIALER  
SYMMETRI, STIVHED OG STYRKE**

REN OG ANVENDT MEKANIK  
INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK  
AALBORG UNIVERSITETSCENTER  
SEPTEMBER 1980

ISSN 0105-7421 RAPPORT NR. 8013



## RETTELSE TIL RAPPORT NR. 8013

Side 4, l. 13 f.o.:	læs: . . at nogle materialeegenskaber . .
Side 9, formel (2.49):	læs: $\beta_k^p$ i stedet for $\beta_q^p$
Side 15, formel (2.83):	læs: $\beta_r^k$ i stedet for det første $\beta_s^k$
Side 40, l. 16 f.n.:	læs: 2.2.4 i stedet for 2.15
Side 54, figur 4.2:	læs: $\hat{a}_{(l)}$ i stedet for $\hat{a}_{(b)}$
Side 64, formel (4.73):	læs: $\epsilon_A^{12}$ i stedet for $\epsilon_A$
Side 67, l. 10 f.n.:	læs: (4.82) i stedet for (4.81)
Side 69, formel (4.100):	læs: $f_1 = 2(\sigma_{xx} - \varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac}))^2 - 2(\sigma_{xx} - \varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac}))\sigma_{yy} + 2\sigma_{yy}^2 + 6\sigma_{xy}^2 - 2\sigma_c^2 = 0$ for $t = \sigma_c - \sigma_{Ac}$
Side 73, formel (4.107):	læs: $g = g_1 g_2 g_3 = 0$
Side 74, formel (4.114):	læs: $-f = \dots = 0$
Side 76, l. 14 f.o.:	læs: $t = \sigma_{At} - \sigma_t$ i stedet for $t = \sigma_{At} - \sigma_c$
Side 76, l. 16 f.o.:	læs: $\varphi(\sigma_{At} - \sigma_t)$ i stedet for $\varphi(\sigma_{At} - \sigma_c)$
Side 78, formel (4.126):	læs: $\tau_F$ i stedet for $\tau_p$
Side 79, l. 2 f.o.:	læs: (4.118)
Side 81, figur 4.17:	læs: $\varphi\sigma_F/2$ i stedet for $\varphi\sigma_F$ (2 gange)
Side 84, formel (4.137):	læs: $\sigma_{cx} + \sigma_{xx} = 0$ i stedet for $\sigma_{cx} + \sigma_{yx} = 0$
Side 85, l. 12 f.o.:	læs: trækspændinger
Side 87, l. 10 f.o.:	læs: Jacobys
Side 88, figur 4.20:	øverste 10 t slettes
Side 114, formel (D.5):	læs: $S\partial(f - K)/\partial C_{k\ell}$ i stedet for $S\partial(F - K)/\partial C_{k\ell}$
Side 142, l. 7 f.n.:	læs: complex
Side 154, henvisning [66.07]:	tilføj: (65)



---

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

INSTITUTE OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITETSCENTER · AUC · AALBORG · DANMARK

---

---

A. RATHKJEN  
ANISOTROPE MATERIALER  
SYMMETRI, STIVHED OG STYRKE  
SEPTEMBER 1980

ISSN 0105 - 7421 RAPPORT NR. 8013

---



---

## FORORD

Den foreliggende afhandling er udarbejdet i forbindelse med mit licentiatstudium vedrørende »Anisotrope materialer».

Studiet er muliggjort bl.a. ved, at medarbejdere ved Instituttet for Bygningsteknik i henhold til en anmodning fra det teknisk-naturvidenskabelige fakultetsråd har overtaget en del af min undervisningsbelastning.

Som faglærere har medvirket professor, dr.techn. M. P. Nielsen, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, og ingeniørdocent, lic.techn. P. Thoft-Christensen, Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter.

Maskinskrivningen er foretaget af assistenterne Kirsten Aakjær, Instituttet for Bygningsteknik, og Bente Zachariassen, Institut for Industriel Konstruktion og Energiteknik. Tegningerne er udført af teknisk assistent Norma Hornung, Instituttet for Bygningsteknik.

Medarbejdere ved Aalborg Universitetsbibliotek har fremskaffet hovedparten af den benyttede litteratur.

Afhandlingen er trykt på Aalborg Universitetscenters Centertrykkeri.

Alle bringes hermed min tak for den assistance, der er ydet.

Aalborg, september 1980

A. Rathkjen







---

 INDHOLDSFORTEGNELSE

FORORD .....	I
INDHOLDSFORTEGNELSE .....	III
INDLEDNING .....	V
1. HISTORISK OVERSIGT .....	1
2. MATERIALESYMMETRI. ....	3
2.1 Lineære tensorrelationer .....	4
2.1.1 Transformation af tensorkomponenter, side 5	
2.1.2 Symmetrioperationer I: Drejninger, side 7	
2.1.3 Symmetrirelationer for tensorer af anden orden, matrix- formulering, side 8	
2.1.4 Isotropi og anisotropi, side 11	
2.1.5 Symmetrigrupper for andenordens tensorer, side 14	
2.1.6 Symmetrirelationer og symmetrigrupper for tensorer af fjerde orden, side 15	
2.1.7 Symmetrioperationer II: Inversion, refleksioner, side 16	
2.1.8 Homogenitet, side 17	
2.1.9 Oversigt over lineære tensorrelationers symmetriforhold side 18	
2.1.10 Grafisk repræsentation af tensorkomponenter, side 21	
2.2 Ikke-lineære tensorrelationer. ....	24
2.2.1 Skalære funktioner af vektorargumenter, side 24	
2.2.2 Vektorfunktioner af vektorargumenter, side 31	
2.2.3 Skalære funktioner af tensorargumenter, side 32	
2.2.4 Tensorfunktioner af tensorargumenter, side 37	
2.2.5 Valg af basisinvarianter, side 38	
2.2.6 Ikke-lineære tensorrelationer på tilvækstform, side 39	
3. LINEÆR ELASTICITETSTEORI FOR ANISOTROPE MATERIALER	43
3.1 Plane spændingstilstande. ....	44
3.1.1 Homogene, plane spændingstilstande, side 44	
3.1.2 Ikke-homogene, plane spændingstilstande, side 47	
4. ARMEREDE MATERIALER .....	53
4.1 Tøjninger og spændinger i armerede materialer .....	54
4.2 Konstitutive ligninger .....	56
4.2.1 Lineærelastisk matrix med lineærelastisk armering, side 56	
4.3 Brud- og flydebetingelser. ....	67
4.3.1 Armeret v. Mises-materiale, side 68	
4.3.2 Armeret Coulomb-materiale, side 72	
4.3.3 Sammenligning af brudbetingelser, side 83	
4.4 Ideale fiberarmerede materialer. ....	89



APPENDIX .....	97
A.SYMBOLER .....	97
B.DEFORMATIONSBEKRIVELSE .....	99
C.BEVÆGELSESLIGNINGER .....	106
D.INDRE BINDINGER .....	113
E.KONTROLLABLE DEFORMATIONER .....	118
F.TODIMENSIONALE LINEÆRELASTISKE PROBLEMER .....	120
G.KOMPLEKSE AKSER .....	126
H.TRANSFORMATION AF FJERDEORDENSTENSORER, SYMME- TRIRELATIONER OG SYMMETRIGRUPPER .....	128
I. RELATIONER MELLEM HOVEDINVARIANTER OG EGENVÆR- DIER. ....	139
RESUMÉ - SUMMARY .....	142
LITTERATURFORTEGNELSE .....	143
STIKORDSREGISTER .....	168

---

## INDLEDNING

Sædvanligvis indeholder beregningsforudsætningerne for bærende konstruktionselementer en antagelse om, at konstruktionsmaterialet er isotropt. Med en stadig kraftigere udnyttelse af bl.a. konstruktionsmaterialernes styrkeegenskaber bliver et bedre kendskab til den indflydelse, som materialernes anisotrope egenskaber har på konstruktionselementernes opførsel, mere og mere påkrævet.

En oversigt over hovedpunkterne i udviklingen af konstitutive ligninger, brud- og flydebetingelser for anisotrope materialer er givet i kapitel 1. Oversigten er ført frem til omkring 1930, da udviklingen i den følgende periode har været ret omfattende og spredt over så mange delområder, at det på nuværende tidspunkt kan være vanskeligt at få et overblik over hvilke resultater, der er de væsentligste.

For anisotrope materialer indtager symmetriforholdene en overordentlig vigtig plads i forbindelse med beskrivelsen af materialernes fysiske egenskaber. Kapitel 2 indeholder derfor en redegørelse for hvorledes såvel lineære som ikke-lineære materialeegenskaber kan beskrives under hensyn til de forskellige former for symmetri, som materialerne kan være i besiddelse af. Mens disse forhold er nogenlunde afklaret for lineære materialeegenskabers vedkommende, er dette endnu ikke tilfældet for de ikke-lineære egenskabers vedkommende.

I kapitel 3 behandles lineær elasticitetsteori for anisotrope materialer. Forskellene mellem isotrope og anisotrope skivers deformationer under nogle homogene spændingstilstande vises, og anvendelse af kompleks funktionsteori til løsning af todimensionale problemer omtales. Nogle få resultater fra en numerisk løsning af et deformationsproblem for en rektangulær skive anføres ligeledes.

Armerede materialer er emnet for kapitel 4. Efter en gennemgang af de grundlæggende antagelser vedrørende fordelingen af tøjninger og spændinger i matrixmateriale og armering diskuteres forskellige muligheder for at opstille konstitutive ligninger for specielt lineærelastiske kompositmaterialer ud fra kendskab til delmaterialernes konstitutive ligninger. Tilnærmede brud- og flydebetingelser opstilles for armerede v. Mises- og Coulomb-materialer, idet særligt plane spændingstilstande behandles. Nogle tidligere fremsatte hypoteser vedrørende anisotrope materials brudforhold omtales og sammenlignes med de her anførte. Til slut omtales ideale fiberarmerede materialer, dvs. materialer der er såvel ustrækkelige i armeringsretningerne som usammentrykkelige.

I et appendix er samlet en redegørelse for nogle specielle symboler og konventioner (appendix A), nogle grundbegreber, -principper og -ligninger inden for kontinuummeknikken (appendix B, C, D, E og F) samt en uddybning af nogle af de i teksten behandlede udledninger og emner (appendix G, H og I).



## 1. HISTORISK OVERSIGT

Studiet af anisotrope materialer har i tidens løb været nært knyttet til studiet af krystaller og beskrivelse af krystallers symmetriforhold. Den ældste, kendte beretning herom stammer fra Nicolaus Steno [1669.1], som i 1669 konstaterede, at vinklerne mellem et bjergkrystals sideflader er konstante. Inden for krystallografien havde man dog ikke nået resultater, som umiddelbart kunne anvendes, da de første elasticitetsligninger blev opstillet i begyndelsen af 1800-tallet.

I 1821 offentliggjorde Navier [1827.1] et sæt ligninger, som udtrykker lovene for ligevægt og bevægelse af et elastisk, isotropt legeme. På grund af en speciel antagelse om de kræfter, som virker mellem legemets partikler, indeholdt Naviers ligninger kun 1 materialekonstant, og hermed var kimen lagt til en strid om, hvor mange materialekonstanter der er nødvendige for beskrivelsen af et isotropt, elastisk materiale. Allerede året efter fandt Cauchy [1823.1] nemlig, at der optræder 2 konstanter i en generel beskrivelse. Cauchy indførte spændings- og tøjningsbegrebet, og i stedet for en antagelse om kræfterne mellem materialets partikler gik han ud fra, at spændings-tøjningsrelationerne er lineære og, at hovedspændingsretningerne er sammenfaldende med hovedtøjningsretningerne for et isotropt materiale.

Spændings-tøjningsrelationerne for anisotrope materialer havde Cauchy udledt i 1827 [1828.1]. I dette arbejde benyttede Cauchy en antagelse om kræfterne mellem materialets partikler, og indførte derved 6 relationer mellem elasticitetskonstanterne, som ikke altid er opfyldt, de såkaldte Cauchy-relationer. Resultatet af denne antagelse var, at Cauchy fandt, at et lineærelastisk, anisotropt materiale kan beskrives ved 15 elastiske konstanter i stedet for de 21, som man nu ved er nødvendige i det generelle tilfælde. For et isotropt materiale reduceres antallet af elastiske konstanter efter denne teori til 1, hvilket er i overensstemmelse med Naviers resultater fra 1821, men i modstrid med Cauchys eget arbejde fra 1822.

Spørgsmålet om antallet af elastiske konstanter blev i 1837 afklaret af Green [1839.1] ud fra teoretiske overvejelser. På grundlag af sætningen om energiens bevarelse, ved indførelse af en tøjningsenergifunktion og under anvendelse af det virtuelle arbejdes princip fandt Green, at et lineærelastisk, anisotropt materiale generelt karakteriseres ved 21 konstanter. For et isotropt materiale bliver antallet af konstanter dermed 2.

På den eksperimentelle side viste forsøg med bl.a. kork og gummi, at disse materials opførsel ikke kan beskrives ved kun 1 konstant. Da man kan betvivle, at disse materialer er isotrope, var det først Voigts forsøg med krystaller, 1887-89, [1887.01, 1888.01, 1889.01], som klart demonstrerede eksistensen af 21 uafhængige elastiske konstanter for de mest anisotrope materialer. Voigt behøvede kun at undersøge et begrænset antal krystaller, da Hessel [1830.01] i 1830 havde fundet frem til, at alle krystaller kan klassificeres i 32 krystalklasser.

Omkring 100 år efter opstillingen af de første elasticitetsligninger var grundlaget for opstilling af konstitutive ligninger for lineærelastiske, anisotrope materialer klarlagt, hvilket fremgår af artikler af Bekhterev [25.01], Love [27.01], Auerbach [27.02] og Geckeler [28.01]. Nogenlunde samtidig havde v. Mises [28.04] udvidet sin flydeteori for isotrope materialer fra 1913 til at omfatte visse former for krystalsymmetri.

At træ er et anisotropt materiale har været erkendt længe. Således undersøgte Savart [1829.01] i 1829 svingninger af træplader og antog ved behandlingen af forsøgsresultaterne, at træ har tre på hinanden vinkelrette symmetriplaner; en antagelse som stadig benyttes, og som må siges at gælde med rimelig nøjagtighed. Blandt de, der beskæftigede sig med bestemmelse af træs elasticitetskonstanter skal nævnes Hagen [1842.01], som i 1842 foreslog et empirisk udtryk til bestemmelse af elasticitetsmodulen i en retning, som danner en vinkel med træets fiberretning, samt St. Venant [1864.01], som i 1864 opstillede et udtryk til bestemmelse af elasticitetsmodulens variation med afstanden fra en træstammes centerlinie. Udtryk til bestemmelse af træs styrke under træk- og trykpåvirkning, som danner en vinkel med fiberretningen, blev foreslået af Jacoby [09.01] i 1909, Howe [12.01] i 1912 og Hankinson [21.01] i 1921 samt Baumann [22.02], der i 1922 undersøgte såvel styrke- som stivhedsforhold.

Beregning af krydsarmerede jernbetonplader efter elasticitetsteorien under hensyntagen til anisotropi blev i 1914 behandlet af Huber [14.01], som opstillede en tilnærmet differentiaalligning for pladens udbøjning. Mens Huber udelukkende behandlede urevnet beton og ortogonal armering, betragtede Leitz [23.01], [26.01], [26.02] og [30.01] også det revnede stadium og skævvinklet armering samt såvel skiver som plader. Suenson [19.01] undersøgte i 1918 såvel stivheden som revnedannelse og især styrken af pladebjælker med krydsarmering under  $45^\circ$  med trækkets retning. I det elastiske stadium er en jernbetonplade anisotrop, også når den har samme armering i to på hinanden vinkelrette retninger. I brudstadiet derimod kan en sådan plade være isotrop, hvilket Ingerslev [21.02] konstaterede i 1921 under opstillingen af en brudlinieberegning for jernbetonplader. Ingerslevs beregningsmåde blev i 1931 af Johansen [31.04] udvidet til at omfatte uensarmerede, og dermed i brudmæssig henseende, anisotrope plader.



## 2. MATERIALESYMMETRI

Ved beskrivelsen af materialers fysiske egenskaber spiller begreberne *homogenitet/inhomogenitet* og *isotropi/anisotropi* en stor rolle. En præcis betydning af disse begreber vil blive givet senere i dette kapitel, foreløbig vil det være tilstrækkeligt med følgende udlægninger: Et materiale er homogent med hensyn til en egenskab, når denne egenskab er den samme i alle punkter, og et materiale er isotropt med hensyn til en egenskab, når denne egenskab i et vilkårligt punkt er den samme i alle retninger.

For anisotrope materialer spiller tilsvarende begrebet *symmetri* en stor rolle. Et materiale har en form for symmetri, når man efter at have drejet det en bestemt vinkel om en bestemt akse, finder samme egenskaber som før drejningen.

Undersøgelse af materialers symmetriforhold fandt først sted i forbindelse med studiet af krystaller. På grundlag af krystallernes geometriske opbygning har man fundet frem til, at krystallers symmetriforhold kan beskrives ved 32 krystalklasser, som kan inddeles i 7 (ofte kun 6) krystalsystemer eller i 11 krystaltyper. De 11 krystaltyper svarer til hver sin rotationsgruppe. Undersøgelserne viser bl.a., at den ovenfor omtalte vinkel kan skrives som  $2\pi/n$ , hvor  $n$  kun kan antage værdierne 1, 2, 3, 4 og 6. For andre materialer end krystaller er der intet, der på forhånd udelukker visse værdier af  $n$ , og det er derfor i det følgende valgt at knytte betragtninger vedrørende anisotrope materialers symmetriforhold til beskrivelsen af materialers fysiske egenskaber fremfor den geometriske opbygning.

Til ethvert materiale er knyttet adskillige fysiske egenskaber som fx massetæthed, forskellige former for ledningsevne og evne til at deformeres under mekanisk påvirkning. Betragtes udtrykket

$$dM = \rho dV \quad (2.1)$$

ses, at massetætheden  $\rho$  indgår i en relation mellem massen  $dM$  og volumet  $dV$  af et infinitesimalt element. De tre størrelser er alle skalarer, og  $\rho$  afhænger af, hvor elementet befinder sig i et legeme eller med andre ord er  $\rho$  en funktion af stedet.

For en væskestrømning i et porøst materiale lyder Darcy's lov i sin simpleste form

$$\bar{v} = k\bar{i} \quad (2.2)$$

hvor permeabilitetskoefficienten  $k$  indgår i en relation mellem gradientvektoren  $\bar{i}$  ( $i_q = \partial h / \partial x^q$ ,  $h$  = potentialet) og hastighedsvektoren  $\bar{v}$ . I dette udtryk angiver skalarer  $k$  materialeegenskaben permeabilitet for et isotropt materiale og de to vektorer  $\bar{i}$  og  $\bar{v}$  har samme retning. I anisotrope materialer har de to vektorer ikke samme retning, hvilket kan udtrykkes ved

$$\bar{v} = \bar{k} \cdot \bar{i} \quad (2.3)$$

eller på komponentform

$$v_{\ell} = k_{\ell}^m i_m \quad (2.4)$$

hvor

$$\bar{k} = k_{\ell}^m \bar{b}^{\ell} \bar{b}_m \quad (2.5)$$

er permeabilitetstensoren, ( $\bar{b}_m$  er basisvektorer og  $\bar{b}^{\ell}$  reciprokke basisvektorer).

Sammenhængen mellem en spændingstensor  $\sigma_{k\ell}$  og en tøjningstensor  $\epsilon_{mn}$  er, for et lineær-elastisk materiale, givet ved Hooke's udvidede lov

$$\sigma_{k\ell} = C_{k\ell}^{nm} \epsilon_{mn} \quad (2.6)$$

hvor elasticitetstensoren  $C_{k\ell}^{nm}$  er en fjerdeordens tensor, som angiver materialets elastiske egenskaber.

Af foranstående eksempler fremgår, at materialeegenskaber kan udtrykkes ved tensorer (Nye [57.04]). Undersøgelse af et materiales symmetriforhold vedrørende materialeegenskaber er således knyttet til undersøgelse af tensors symmetriforhold. Tensorkomponenterne kan, som nævnt for massetæthedens vedkommende, være skalære funktioner af stedet. For undersøgelse af et materiales symmetriforhold i et enkelt punkt er dette uden betydning og de enkelte tensorkomponenter kan behandles som konstanter. En eventuel stedafhængighed må behandles særskilt.

Ofte støder man på tensorer, som beskriver materialeegenskaber og som har symmetriegenskaber, der ikke hidrører fra materialets symmetriegenskaber. Eksempelvis har man i den lineære elasticitetsteori, at tøjningstensoren pr. definition er symmetrisk, idet

$$\epsilon_{k\ell} = \frac{1}{2} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k}) = \epsilon_{\ell k} \quad (2.7)$$

Momentligninger giver, at spændingstensoren er symmetrisk

$$\sigma_{k\ell} = \sigma_{\ell k} \quad (2.8)$$

Dette medfører for elasticitetstensoren, at

$$C_{k\ell}^{mn} = C_{k\ell}^{nm} = C_{\ell k}^{mn} \quad (2.9)$$

Yderligere medfører termodynamiske overvejelser, at

$$C_{k\ell}^{mn} = C_{mn}^{k\ell} \quad (2.10)$$

Sådanne, materialet uvedkommende, symmetribetragtninger vil i det følgende først blive gjort, når de symmetrirelationer, der stammer fra materialets symmetriegenskaber, er opstillet.

## 2.1 Lineære tensorrelationer

De ovenfor nævnte materialeegenskaber indgår i lineære tensorrelationer, som først skal diskuteres. Ikke-lineære tensorrelationer undersøges i afsnit 2.2.



### 2.1.1 Transformation af tensorkomponenter

En vilkårlig tensor  $\underline{T}$  betragtes. Tensoren er bestemt ved dens komponenter med hensyn til et sæt basisvektorer  $\bar{b}_k$  og de reciprokke basisvektorer  $\bar{b}^l$ . For simpelhedsskyld benyttes i det følgende ortonormerede basisvektorer  $i_k$  og  $\hat{i}^k$  for hvilke, der gælder

$$\hat{i}_k \cdot \hat{i}^l = \delta_k^l, \quad \hat{i}_k \cdot i_l = \delta_{kl}, \quad i^k \cdot i^l = \delta^{kl} \quad (2.11)$$

Lad tensoren  $\underline{T}$  være givet ved

$$\underline{T} = T_{pq}^{kl} \dots \hat{i}_k \hat{i}_l \dots \hat{i}^p \hat{i}^q \dots \quad (2.12)$$

$$= t_{rs}^{mn} \dots \hat{I}_m \hat{I}_n \dots \hat{I}^p \hat{I}^s \dots \quad (2.13)$$

hvor  $\hat{I}_k$  og  $\hat{I}^l$  er et andet sæt ortonormerede basisvektorer, drejet i forhold til det første.

Mellem komponenterne gælder da

$$t_{rs}^{mn} \dots = \beta_k^m \beta_l^n \dots \gamma_r^p \gamma_s^q \dots T_{pq}^{kl} \dots \quad (2.14)$$

hvor

$$\beta_k^m = \hat{I}_k \cdot \hat{i}^m, \quad \gamma_r^p = \hat{I}^p \cdot \hat{i}_r \quad (2.15)$$

Af (2.15) følger, at

$$\hat{i}^k = \beta_m^k \hat{I}^m \quad \text{og} \quad \hat{i}_k = \gamma_k^m \hat{I}_m \quad (2.16)$$

som sammen med (2.11) giver

$$\beta_p^k \gamma_l^p = \delta_l^k \quad (2.17)$$

Tilsvarende finder man

$$\beta_k^p \gamma_p^l = \delta_k^l \quad (2.18)$$

$\beta_l^k$  og  $\gamma_n^m$  er således hinandens reciprokke og  $\beta_l^k$  er en ortogonal tensor  $\bar{\bar{B}}$ 's komponenter, mens  $\gamma_n^m$  er komponenterne af  $\bar{\bar{B}}^{-1} = \bar{\bar{B}}^T$ .

Udregning af  $t_{rs}^{mn} \dots$  efter (2.14), når  $T_{pq}^{kl} \dots$  samt  $\beta_k^m$  og dermed  $\gamma_r^p$  er kendte, kan foretages på flere måder.

Idet en ortogonal tensor, som repræsenterer en drejning, kan skrives (Gibbs & Wilson [01.01], Lagally [28.02])

$$\bar{\bar{B}} = \bar{b}\bar{b} + (\bar{I} - \bar{b}\bar{b})\cos\chi + \bar{I} \times \bar{b}\sin\chi \quad (2.19)$$

hvor  $\bar{b}$  er en enhedsvektor i omdrejningsaksens retning og  $\chi$  er drejningsvinklen, har man på komponentform (Jeffreys [31.01])

$$\beta_l^k = b^k b_l + (\delta_l^k - b^k b_l)\cos\chi + \delta^{km} e_{m\ell p} b^p \sin\chi \quad (2.20)$$

og dermed

$$\gamma_l^k = b^k b_l + (\delta_l^k - b^k b_l)\cos\chi - \delta^{km} e_{m\ell p} b^p \sin\chi \quad (2.21)$$

Udtrykkene (2.20) og (2.21) kan uden videre benyttes i forbindelse med (2.14), når en bestemt vektor  $b$  er valgt. I det følgende vil drejninger om  $\hat{i}_3$  hyppigt blive anvendt. I dette tilfælde har man

$$b^k = \delta_3^k, \quad b_q = \delta_q^3 \quad (2.22)$$

og

$$\left. \begin{array}{l} \beta_q^k \\ \gamma_q^k \end{array} \right\} = \delta_3^k \delta_q^3 + (\delta_q^k - \delta_3^k \delta_q^3) \cos \chi \pm \delta^{km} e_{m\ell p} \delta_3^p \sin \chi \quad (2.23)$$

I stedet for at operere med indicerede størrelser, kan man anvende matrixmultiplikation. Idet man i enkelt- og dobbeltindicerede størrelser identificerer øvre index med rækkenummet og nedre index med søjlenummet, får man for førsteordens tensorer (vektorer)

$$[v^r] = [\beta_s^r] [V^s] \quad (2.24)$$

og

$$[v_s] = [V_r] [\gamma_s^r] \quad (2.25)$$

For andenordens tensorer bliver

$$[a_s^r] = [\beta_p^r] [A_q^p] [\gamma_s^q] \quad (2.26)$$

Også ved transformation af højere ordens tensorkomponenter kan man benytte matrixmultiplikation. Eksempelvis kan en fjerdeordens tensor skrives som en  $9 \times 9$  matrix

$$[a_{mn}^{k\ell}] = \begin{bmatrix} a_{1n}^{1\ell} & a_{2n}^{1\ell} & a_{3n}^{1\ell} \\ a_{1n}^{2\ell} & a_{2n}^{2\ell} & a_{3n}^{2\ell} \\ a_{1n}^{3\ell} & a_{2n}^{3\ell} & a_{3n}^{3\ell} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

hvor fx  $[a_{1n}^{2\ell}]$  er en  $3 \times 3$  submatrix.

Transformationsreglen for fjerdeordens tensorer

$$a_{mn}^{k\ell} = \beta_r^k \beta_s^\ell A_{pq}^{rs} \gamma_m^p \gamma_n^q \quad (2.28)$$

kan således skrives, se appendix H

$$\begin{bmatrix} a_{1n}^{1\ell} & a_{2n}^{1\ell} & a_{3n}^{1\ell} \\ a_{1n}^{2\ell} & a_{2n}^{2\ell} & a_{3n}^{2\ell} \\ a_{1n}^{3\ell} & a_{2n}^{3\ell} & a_{3n}^{3\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^1 \beta_s^\ell & \beta_2^1 \beta_s^\ell & \beta_3^1 \beta_s^\ell \\ \beta_1^2 \beta_s^\ell & \beta_2^2 \beta_s^\ell & \beta_3^2 \beta_s^\ell \\ \beta_1^3 \beta_s^\ell & \beta_2^3 \beta_s^\ell & \beta_3^3 \beta_s^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1q}^{1s} & A_{2q}^{1s} & A_{3q}^{1s} \\ A_{1q}^{2s} & A_{2q}^{2s} & A_{3q}^{2s} \\ A_{1q}^{3s} & A_{2q}^{3s} & A_{3q}^{3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1^1 \gamma_n^q & \gamma_2^1 \gamma_n^q & \gamma_3^1 \gamma_n^q \\ \gamma_1^2 \gamma_n^q & \gamma_2^2 \gamma_n^q & \gamma_3^2 \gamma_n^q \\ \gamma_1^3 \gamma_n^q & \gamma_2^3 \gamma_n^q & \gamma_3^3 \gamma_n^q \end{bmatrix} \quad (2.29)$$



eller på symbolsk form

$$[a_{mn}^{kl}] = [\beta_r^k \beta_s^l] [A_{pq}^{rs}] [\gamma_m^p \gamma_n^q] \quad (2.30)$$

Det ses umiddelbart, at

$$[\beta_r^k \beta_s^l] [\gamma_m^r \gamma_n^s] = [\delta_m^k \delta_n^l] \quad (2.31)$$

hvor  $[\delta_m^k \delta_n^l]$  er en  $9 \times 9$  enhedsmatrix.

### 2.1.2 Symmetrioperationer I: Drejninger

En materialeegenskab, som kan beskrives ved en andenordens tensor  $a_k^l$  betragtes.  $a_k^l$  indgår i en relation mellem to vektorer  $t_k$  og  $e_l$  således, at

$$t_k = a_k^l e_l \quad (2.32)$$

Ved en forsøgsopstilling, hvor man kan påtrykke materialet vektoren  $e_l$  og måle vektoren  $t_k$ , kan man bestemme  $a_k^l$  under anvendelse af (2.32). De herved bestemte komponenter af  $a_k^l$  svarer til en ganske bestemt orientering af materialet i forhold til prøveopstillingen.

Anbringes materialet i prøveopstillingen med en anden orientering, svarer dette til, at materialet er blevet drejet om en akse. En sådan drejning kan beskrives ved en ortogonal andenordens tensor  $\bar{B}$ . Betegnes denne ortogonale tensors komponenter  $\beta_l^k$  i forhold til et fast sæt basisvektorer (faste i forhold til prøveopstillingen) og betegnes den transponerede tensors komponenter  $\gamma_l^k$  har man

$$\begin{aligned} \beta_l^k \gamma_m^l &= \delta_m^k, \quad \beta_l^k \gamma_k^m = \delta_l^m \\ \det[\beta_l^k] &= \det[\gamma_l^k] = +1 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Påtrykkes materialet med den nye orientering en vektor  $E_l$ , og måles  $T_k$ , gælder den til (2.32) svarende relation

$$T_k = A_k^l E_l \quad (2.34)$$

Da  $a_k^l$  og  $A_k^l$  er komponenter af samme tensor, gælder

$$a_k^l = \beta_n^k \gamma_l^m A_m^n \quad \text{og} \quad A_k^l = \beta_l^m \gamma_n^k a_m^n \quad (2.35)$$

som indsat i (2.34) giver

$$T_k = \beta_k^m \gamma_n^l a_m^n E_l \quad (2.36)$$

Påtrykkes vektoren  $E_l$  således, at

$$E_l = e_l \quad (2.37)$$

har man

$$T_k = \beta_k^m \gamma_n^l a_m^n e_l \quad (2.38)$$

For materialer uden symmetri af nogen art, vil vektorkomponenterne  $T_k$  være forskellige fra  $t_k$  bortset fra drejninger beskrevet ved

$$\beta_l^k = \gamma_l^k = \delta_l^k \quad (2.39)$$

som svarer til drejningsvinkler  $\chi$ , hvor

$$\chi = p2\pi, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

dvs. samme orientering i alle tilfælde.

Hvis man for visse værdier af  $\chi$  finder

$$T_k = \beta_k^m \gamma_n^l a_m^n e_l = t_k = a_k^l e_l \quad (2.41)$$

da har materialet en symmetriakse, og tensorkomponenterne  $a_k^l$  opfylder *symmetrirelationerne*

$$a_k^l = \beta_k^m \gamma_n^l a_m^n \quad (2.42)$$

Om drejningsvinklen  $\chi$  gælder, da man efter  $n$  på hinanden følgende drejninger skal vende tilbage til udgangsorienteringen, at  $n\chi = 2\pi$ , dvs.

$$\chi = 2\pi/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.43)$$

En akse, til hvilken der svarer en drejningsvinkel  $2\pi/n$ , betegnes en  $n$ -fold symmetriakse, og en drejning  $2\pi/n$  om akse kaldes en symmetridrejning.

For en materialeegenskab, som kan beskrives ved en tensor af vilkårlig orden, generaliseres foranstående resultat (2.42) uden videre til

$$a_{ln}^{km} \dots p = \beta_l^r \beta_n^s \dots \beta_q^t \gamma_u^k \gamma_v^m \dots \gamma_w^p a_{rs}^{uv} \dots t \quad (2.44)$$

hvor  $\beta_l^k$  er komponenterne af den ortogonale tensor, som svarer til symmetridrejningen og  $\gamma_l^k$  er den transponerede tensors komponenter.

Et materiale kan udvise symmetri ved drejninger svarende til forskellige vinkler og forskellige akser. Betegnes de dertil hørende ortogonale tensorer  $\bar{B}_{(1)}, \bar{B}_{(2)}, \dots$ , vil disse tensorer udgøre en gruppe, som kaldes materialets *symmetrigruppe*. Såfremt to drejninger repræsenteret ved  $\beta_{(1)l}^k$  og  $\beta_{(2)l}^k$  begge er symmetridrejninger, vil også drejningen repræsenteret ved  $\beta_l^k$ , hvor

$$\beta_l^k = \beta_{(1)m}^k \beta_{(2)l}^m \quad (2.45)$$

være en symmetridrejning, hvilket antyder, at materialets symmetri kan beskrives ved et forholdsvis lille antal drejningstensorer. Det er derfor af stor værdi at kende det mindste antal tensorer, som kan beskrive en materialeegenskabs symmetriforhold fuldstændigt.

### 2.1.3 Symmetrirelationer for tensorer af anden orden, matrixformulering

En tensor af anden orden  $a_l^k$  kan som nævnt angives på matrixform, som

$$[a_l^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

En drejning om en akse kan derfor angives ved en ortogonal matrix. En forholdsvis simpel form får denne matrix, hvis man går ud fra et ortonormeret system af basisvektorer  $\hat{i}_k$  og lader omdrejningsaksen være sammenfaldende med en af basisvektorerne, fx  $\hat{i}_3$ . I dette tilfælde får man

$$[\beta_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

En symmetrirelation af typen (2.42)

$$a_{\varrho}^k = \beta_{\varrho}^m \gamma_n^k a_m^n \quad (2.48)$$

omskrives ved multiplikation med  $\beta_k^p$  til

$$\beta_k^p a_{\varrho}^k = \beta_{\varrho}^m \beta_k^p \gamma_n^k a_m^n = \beta_{\varrho}^m \delta_n^p a_m^n = \beta_{\varrho}^m a_m^p \quad (2.49)$$

idet ortogonalitetsbetingelsen (2.33)

$$\beta_k^p \gamma_n^k = \delta_n^p \quad (2.33)$$

benyttes. På matrixform fås

$$[\beta_k^p] [a_{\varrho}^k] = [a_k^p] [\beta_{\varrho}^k] \quad (2.50)$$

Udskrives matrixligningen, har man

$$\begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

eller

$$\begin{bmatrix} a_1^1 \cos\chi + a_1^2 \sin\chi & a_2^1 \cos\chi + a_2^2 \sin\chi & a_3^1 \cos\chi + a_3^2 \sin\chi \\ -a_1^1 \sin\chi + a_1^2 \cos\chi & -a_2^1 \sin\chi + a_2^2 \cos\chi & -a_3^1 \sin\chi + a_3^2 \cos\chi \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 \cos\chi - a_1^2 \sin\chi & a_1^1 \sin\chi + a_1^2 \cos\chi & a_1^3 \\ a_2^1 \cos\chi - a_2^2 \sin\chi & a_2^1 \sin\chi + a_2^2 \cos\chi & a_2^3 \\ a_3^1 \cos\chi - a_3^2 \sin\chi & a_3^1 \sin\chi + a_3^2 \cos\chi & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Det bemærkes, at en drejning om  $\hat{i}_3$  ikke medfører indskrænkninger af nogen art for  $a_3^3$  uanset drejningsvinklen.



Ligningssystemet (2.52) skrives herefter

$$\begin{bmatrix} (a_2^1 + a_1^2)\sin\chi & (a_1^1 - a_2^2)\sin\chi & a_3^1(1 - \cos\chi) - a_3^2\sin\chi \\ (a_1^1 - a_2^2)\sin\chi & (a_2^1 + a_1^2)\sin\chi & a_3^2(1 - \cos\chi) + a_3^1\sin\chi \\ a_1^3(1 - \cos\chi) + a_2^3\sin\chi & a_2^3(1 - \cos\chi) - a_1^3\sin\chi & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

For en 2-fold symmetriakse er (2.53) opfyldt for

$$a_3^1 = 0, a_3^2 = 0, a_1^3 = 0, a_2^3 = 0 \quad (2.54)$$

dvs. for

$$[a_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

hvor de angivne komponenter er uafhængige af hinanden.

For  $n = 3, 4, \dots$  og i øvrigt for en vilkårlig værdi af  $\chi$  er (2.53) opfyldt, når igen (2.54) er opfyldt og yderligere

$$a_1^1 - a_2^2 = 0, a_2^1 + a_1^2 = 0 \quad (2.56)$$

dvs. for

$$[a_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ -a_2^1 & a_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Ved betragtninger svarende til foranstående finder man, at  $[a_{\varrho}^k]$  bliver

$$[a_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

hvis  $\hat{i}_1$  er en 2-fold symmetriakse. Er både  $\hat{i}_1$  og  $\hat{i}_3$  2-fold symmetriakser, får man

$$[a_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Betragtes også  $\hat{i}_2$  som en 2-fold symmetriakse, vil dette ikke medføre yderligere restriktioner.

Såfremt  $\hat{i}_1$ ,  $\hat{i}_2$  og  $\hat{i}_3$  er  $n$ -fold symmetriakser med  $n > 2$  eller symmetriakser med vilkårlig drejningsvinkel  $\chi$ , reduceres matricen til

$$[a_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Tensoren

$$a_{\varrho}^k = a \delta_{\varrho}^k \quad (2.61)$$

kaldes en isotrop tensor af anden orden.

I forbindelse med en tensor  $a_{\varrho}^k$ , for hvilken symmetrirelationen (2.53) er opfyldt for enhver værdi af  $\chi$ , benyttes betegnelsen transvers isotropi eller cylindersymmetri.

At  $n = 3, 4, \dots$  medfører samme symmetribetingelser udtrykkes ved at sige, at en tensor af anden orden ikke kan skelne mellem drejninger, for hvilke  $n > 2$ .

#### 2.1.4 Isotropi og anisotropi

Såfremt symmetrirelationer af typen

$$a_{\varrho}^k \dots = \beta_{\varrho}^m \dots \gamma_n^k \dots a_m^n \dots \quad (2.62)$$

gælder for enhver ortogonal tensor  $\beta_s^r$ , siges tensoren  $a_{\varrho}^k \dots$  at være isotrop, og et materiale siges at være isotropt med hensyn til den egenskab, som tensoren repræsenterer.

Er relationerne (2.62) kun opfyldt for visse ortogonale tensorer  $\beta_s^r$ , er tensoren anisotrop og såfremt relationerne kun er opfyldt for identitetstensoren  $\beta_s^r = \delta_s^r$ , er tensoren  $a_{\varrho}^k \dots$  fuldstændig anisotrop eller fuldstændig usymmetrisk.

Er symmetrirelationerne opfyldt for enhver drejning om en og samme akse, da er tensoren transvers isotrop med hensyn til den pågældende akse.

En tensor af  $p$ 'te orden kan ikke skelne mellem drejninger, for hvilke  $n$  er større end  $p$ . For at vise dette, transformeres symmetrirelationerne (2.62) til et sæt akser med hensyn til hvilke  $[\beta_{\varrho}^k]$  og  $[\gamma_{\varrho}^k]$  bliver diagonalmatricer (Hermann [34.01]). Man har således

$$\beta_{\varrho}^k = \lambda_{\varrho} \delta_{\varrho}^k, \quad \gamma_{\varrho}^k = \lambda^k \delta_{\varrho}^k \quad (2.63)$$

hvor  $\lambda_{\varrho}$  og  $\lambda^k$  er egenverdierne hørende til henholdsvis  $[\beta_{\varrho}^k]$  og  $[\gamma_{\varrho}^k]$ . På grund af ortogonalitetsbetingelserne  $\beta_{\varrho}^k \gamma_k^m = \delta_{\varrho}^m$  gælder

$$\lambda_{\varrho} \lambda^m \delta_{\varrho}^m = \delta_{\varrho}^m \quad (2.64)$$

Symmetrirelationen (2.62) bliver i det nye akse-system

$$A_{\varrho}^k \dots = \lambda_{\varrho} \delta_{\varrho}^m \dots \lambda^k \delta_n^k \dots A_m^n \dots = \lambda_{\varrho} \dots \lambda^k \dots A_{\varrho}^k \dots \quad (2.65)$$

Egenværdierne  $\lambda_q$  og  $\lambda^k$  er

$$\lambda_1 = \lambda^2 = e^{ix}, \lambda_2 = \lambda^1 = e^{-ix}, \lambda_3 = \lambda^3 = 1 \quad (2.66)$$

svarende til, at tredieaksen i det nye system er omdrejningsaksen (se appendix G).

Antallet af faktorer i koefficienten  $\lambda_q \dots \lambda^k \dots$  er  $p$  for en tensor af  $p$ 'te orden. Koefficienten har derfor værdien

$$e^{iqx}, \text{ hvor } -p \leq q \leq p \quad (2.67)$$

og

$$qx = q2\pi/n \quad (2.68)$$

for en  $n$ -fold symmetriakse.

Når koefficienten antager værdien 1, kan den tilsvarende komponent  $A_q^k \dots$  være forskellig fra nul. Dette vil bl.a. være tilfældet for  $q = 0$ . For  $q \neq 0$ , er

$$e^{iqx} = 1 \text{ for } qx = m2\pi, m = 1, 2, \dots \quad (2.69)$$

eller, med  $\chi = 2\pi/n$ , for

$$q/n = m \quad (2.70)$$

Såfremt  $p$  og dermed  $q$  er mindre end  $n$ , kan (2.70) ikke tilfredsstilles, og koefficienten  $\lambda_q \dots \lambda^k \dots$  vil således være forskellig fra 1 for alle værdier af  $n > p$ .

Når koefficienten er forskellig fra 1, må den tilsvarende komponent  $A_q^k \dots$  være nul, for at symmetrirelationen (2.65) kan være opfyldt.

Hermed er vist, at en tensor af  $p$ 'te orden ikke kan skelne mellem symmetridrejninger, for hvilke  $n$  er større end  $p$ .

Dette kan også udtrykkes på følgende måde. Har et materiale med en egenskab, som repræsenteres ved en tensor af  $p$ 'te orden, en  $n$ -fold symmetriakse, hvor  $n > p$ , da udviser materialet transvers isotropi med hensyn til den pågældende akse.

Anvendelse af symmetrirelationerne (2.65) sammen med egenværdierne (2.66) skal belyses ved et eksempel, hvor først en andenordens tensor med en 2-fold symmetriakse betragtes. Symmetrirelationerne får da følgende udseende på matrixform

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda^1 A_1^1 & \lambda_2 \lambda^1 A_2^1 & \lambda_3 \lambda^1 A_3^1 \\ \lambda_1 \lambda^2 A_1^2 & \lambda_2 \lambda^2 A_2^2 & \lambda_3 \lambda^2 A_3^2 \\ \lambda_1 \lambda^3 A_1^3 & \lambda_2 \lambda^3 A_2^3 & \lambda_3 \lambda^3 A_3^3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & e^{-2ix} A_2^1 & e^{-ix} A_3^1 \\ e^{2ix} A_1^2 & A_2^2 & e^{ix} A_3^2 \\ e^{ix} A_1^3 & e^{-ix} A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$



idet egenverdierne fra (2.66) er indsat.

Med  $\chi = 2\pi/n = \pi$ , er

$$e^{ix} = e^{-ix} = -1 \quad (2.72)$$

$$e^{2ix} = e^{-2ix} = 1$$

og symmetrirelationerne kan skrives

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2A_3^1 \\ 0 & 0 & 2A_3^2 \\ 2A_1^3 & 2A_2^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

eller

$$A_3^1 = 0, A_3^2 = 0, A_1^3 = 0, A_2^3 = 0 \quad (2.74)$$

Det bemærkes, at symmetrirelationerne eksplicit udtrykker hvilke tensor-komponenter, der skal være nul. Til gengæld er komponenterne  $A_q^k$  ikke de komponenter  $a_q^k$ , som indgår i de oprindelige symmetrirelationer.

Sammenhængen mellem de to sæt komponenter er

$$A_q^k = b_q^m g_n^k a_m^n \quad (2.75)$$

hvor (se appendix G)

$$[b_q^m] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [g_n^k] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

På matrixform har man

$$[A_q^k] = [g_n^k] [a_m^n] [b_q^m] \quad (2.77)$$

eller

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a_1^1 + a_2^2 + i(a_2^1 - a_1^2)) & \frac{1}{2}(a_1^1 + a_2^2 + i(a_1^1 - a_2^2)) & (a_3^1 - ia_3^2)/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}(a_2^1 + a_1^2 - i(a_1^1 - a_2^2)) & \frac{1}{2}(a_1^1 + a_2^2 - i(a_2^1 - a_1^2)) & (a_3^2 - ia_3^1)/\sqrt{2} \\ (a_1^3 + ia_2^3)/\sqrt{2} & (a_2^3 + ia_1^3)/\sqrt{2} & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

som sammen med (2.74) giver

$$a_3^1 = 0, a_3^2 = 0, a_1^3 = 0, a_2^3 = 0 \quad (2.79)$$

Heraf følger, at matricen  $[a_\lambda^k]$  har følgende udseende

$$[a_\lambda^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

i overensstemmelse med (2.55).

For  $n > 2$  eller vilkårlige værdier af  $\chi$  fås af (2.71), at også

$$A_2^1 = 0 \text{ og } A_1^2 = 0 \quad (2.81)$$

skal være opfyldt. Ved hjælp af (2.78) ses dette at være tilfældet for

$$a_1^1 - a_2^2 = 0 \text{ og } a_2^1 + a_1^2 = 0 \quad (2.82)$$

i overensstemmelse med (2.56).

### 2.1.5 Symmetrigrupper for andenordens tensorer

Da en tensor af anden orden  $a_\lambda^k$  i henhold til resultatet i afsnit 2.1.4 ikke kan skelne mellem symmetridrejninger, for hvilke  $n > 2$ , er det muligt at bestemme det totale antal symmetrigrupper, som en andenordens tensor kan tilhøre. Først bestemmes de kombinationer af symmetridrejninger om tre på hinanden vinkelrette akser, der fører til forskellige tensorer. Symmetrigruppen angives ved 3 tal  $\{m \ n \ p\}$ , hvor fx  $n$  angiver, at andenaksen er en  $n$ -fold symmetriakse. For transvers isotropi mht. en akse benyttes symbolet  $\infty$ . Tensorens komponenter angives på matrixform, en cirkel om en komponent  $a_\lambda^k$  viser, at denne komponent afhænger af en af de øvrige komponenter. Efter matricen er anført 2 tal  $p/q$ , hvor  $p$  angiver antallet af uafhængige komponenter forskellige fra nul, når  $a_\lambda^k$  er en vilkårlig usymmetrisk tensor, og  $q$  angiver antallet af uafhængige komponenter, når tensoren er symmetrisk,  $a_\lambda^k = a_k^\lambda$ .

Man finder

$$\begin{array}{ll} \{1 \ 1 \ 1\} & \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad 9/6 \\ \{1 \ 1 \ 2\} & \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad 5/4 \\ \{1 \ 2 \ 2\} & \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} \quad 3/3 \\ (\{2 \ 2 \ 2\}) & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\{1 \quad 1 \quad \infty\} & \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ -a_2^1 & a_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} & 3/2 \quad \text{Transvers isotropi} \\
\{1 \quad 2 \quad \infty\} & \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{bmatrix} & 2/2 \\
(\{2 \quad 2 \quad \infty\}) & & \\
\{\infty \quad \infty \quad \infty\} & \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} & 1/1 \quad \text{Isotropi} \\
(\{\infty \quad \infty \quad 1\}) & & \\
(\{\infty \quad \infty \quad 2\}) & &
\end{array}$$

Undersøges muligheden for at kombinere symmetriakser, som ikke står vinkelret på hinanden, viser det sig, at dette ikke fører til nye resultater. En andenordens tensor må derfor tilhøre en af de ovenfor anførte 6 symmetri-grupper.

### 2.1.6 Symmetrirelationer og symmetrigrupper for tensorer af fjerde orden

Af transformationsreglen for fjerdeordens tensorer

$$a_{mn}^{kl} = \beta_s^k \beta_s^l A_{pq}^{rs} \gamma_m^p \gamma_n^q \quad (2.83)$$

følger, når  $\beta_r^k$  tilhører tensorens symmetrigruppe, symmetrirelationerne

$$a_{mn}^{kl} = \beta_r^k \beta_s^l a_{pq}^{rs} \gamma_m^p \gamma_n^q \quad (2.84)$$

Ved multiplikation med  $\beta_t^m \beta_u^n$  fås

$$a_{mn}^{kl} \beta_t^m \beta_u^n = \beta_r^k \beta_s^l a_{tu}^{rs} \quad (2.85)$$

eller på matrixform

$$[a_{mn}^{kl}] [\beta_t^m \beta_u^n] = [\beta_r^k \beta_s^l] [a_{tu}^{rs}] \quad (2.85a)$$

I appendix H er tensorkomponenterne angivet svarende til symmetri-grupperne

$$\{1 \quad 1 \quad 1\}, \{1 \quad 1 \quad 2\}, \{1 \quad 1 \quad 3\}, \{1 \quad 1 \quad 4\}, \{1 \quad 1 \quad \infty\} \quad (2.86)$$

Ved at kombinere symmetridrejninger om tre på hinanden vinkelrette akser, finder man, at følgende grupper, udover de i (2.86) anførte, fører til forskellige tensorer:

$$\{1 \quad 2 \quad 2\}, \{1 \quad 2 \quad 3\}, \{1 \quad 2 \quad 4\}, \{1 \quad 4 \quad 4\}, \{1 \quad 2 \quad \infty\}, \{\infty \quad \infty \quad \infty\} \quad (2.87)$$

Kombineres symmetridrejninger om akser, som ikke står vinkelret på hinanden, finder man, at den eneste symmetrigruppe, som giver et nyt resultat, kan angives ved

$$\{1 \ 1 \ 2/3\} \quad (2.88)$$

hvor  $1 \ 1 \ 2$  betyder, at én af tre på hinanden vinkelrette akser er 2-fold symmetriakser, og  $/3$  betyder, at den akse, som danner samme vinkel med disse akser, er en 3-fold symmetriakse.

Også komponenterne svarende til symmetrigrupperne (2.87) og (2.88) er angivet i appendix H.

En fjerdeordens tensor må således tilhøre en af de ovenfor anførte 12 symmetrigrupper.

### 2.1.7 Symmetrioperationer II: Inversion, reflektioner

Foruden symmetrioperationen drejning eller rotation om en akse optræder også andre symmetrioperationer, nemlig inversion og reflektion. Virkningen af disse symmetrioperationer på tensorers symmetriforhold skal omtales i det følgende.

#### *Inversion*

Et materiale kan have en struktur som medfører, at en tensor som beskriver en materialeegenskab, er ufølsom over for et fortegnsskift på alle 3 koordinater. Den hertil svarende transformation er givet ved matricen

$$[\beta_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -[\delta_{\varrho}^k] = [\gamma_{\varrho}^k] \quad (2.89)$$

og transformationen kaldes en inversion. Da  $[\beta_{\varrho}^k]$  og  $[\gamma_{\varrho}^k]$  er diagonalmatricer, kan samme fremgangsmåde som i afsnit 2.1.4 benyttes. Af symmetrirelationerne

$$a_{\varrho}^k \dots = \lambda_{\varrho} \dots \lambda^k \dots a_{\varrho}^k \dots \quad (2.90)$$

ses, at der ikke lægges bånd af nogen art på komponenterne af en tensor af lige orden, mens alle komponenterne af en tensor af ulige orden skal være nul.

#### *Refleksioner*

Et materiale kan også have en struktur, som medfører, at man i ethvert punkt har en plan, der optræder som symmetriplan. I et cartesisk koordinatsystem med  $x^1$ ,  $x^2$ -planen som symmetriplan, vil transformationen, givet ved matricen

$$[\beta_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [\lambda_{\varrho} \delta_{\varrho}^k] = [\gamma_{\varrho}^k] \quad (2.91)$$

da være en symmetritransformation. Symmetrirelationerne bliver



$$a_{\ell}^k \dots = \lambda_{\ell} \dots \lambda^k \dots a_{\ell}^k \dots \quad (2.92)$$

med

$$\lambda_1 = \lambda^1 = 1, \lambda_2 = \lambda^2 = 1, \lambda_3 = \lambda^3 = -1 \quad (2.93)$$

Heraf ses, at de tensorskomponenter, der har et ulige antal indekser 3, skal være nul, mens der ikke lægges bånd af nogen art på de øvrige. Dette er for tensorer af lige orden præcis de samme restriktioner, som følger af, at tredieaksen er en 2-fold symmetriakse. For disse tensorer medfører reflektioner således ikke nye symmetrigrupper.

Det skal nævnes, at et materiale med 3 på hinanden vinkelrette symmetriplaner kaldes ortotropt (ortogonalt anisotropt). Af ovenstående fremgår, at symmetrigrupperne  $\{1 \ 2 \ 2\}$ ,  $\{1 \ 2 \ 4\}$ ,  $\{1 \ 4 \ 4\}$  og  $\{1 \ 2 \ \infty\}$  svarer til specielle ortotrope materialer, idet  $\{1 \ 2 \ 2\}$  medfører  $\{2 \ 2 \ 2\}$  og fx en 4-fold symmetriakse også er en 2-fold symmetriakse.

Det fremgår umiddelbart, at en reflektion af  $x^1 x^2$ -planen kan fremkomme som en 2-fold rotation om  $x^3$ -aksen efterfulgt af en inversion eller omvendt.

### 2.1.8 Homogenitet

Symmetrioperationerne rotation, inversion og reflektion er operationer knyttet til et enkelt punkt, og en tensors komponenter kan derfor i denne sammenhæng betragtes som konstanter. Såfremt komponenterne ikke er funktioner af stedvektoren til det betragtede punkt, kaldes materialet homogent, og man kan betragte en vilkårlig translation som en symmetrioperation. Medmindre materialet er isotropt, taler man om lineær eller *retliniet anisotropi*, idet betragtningerne hidtil udelukkende er knyttet til cartesiske koordinater.

Selv om en tensors komponenter er funktioner af stedet i et cartesisk koordinatsystem, medfører dette ikke altid at materialet er inhomogent. Betragtes et tensorfelt  $a(x^m)$ , hvis cartesiske komponenter i et referencepunkt betegnes  $A_{\ell}^k \dots$ , og i et vilkårligt andet punkt  $a_{\ell}^k \dots$ , da vil man, hvis der eksisterer en ortogonal transformation  $Q(x^m)$  med  $\det Q = 1$  og den inverse  $\underline{R} = Q^{-1}$ , således at

$$A_{\ell}^k \dots = Q_{\ell}^k \dots R_{\ell}^n \dots a_n^m \dots \quad (2.94)$$

også i dette tilfælde kalde materialet homogent, når  $Q$  er en kontinuert funktion af  $x^m$ . Yderligere benyttes i denne forbindelse betegnelsen *krumliniet anisotropi*.

Idet transformationen fra et cartesisk koordinatsystem  $x^{\ell}$  til et krumliniet system  $y^k$  beskrives ved

$$\beta_{\ell}^k = \partial y^k / \partial x^{\ell} \quad , \quad \gamma_{\ell}^k = \partial x^{\ell} / \partial y^k \quad , \quad \det \beta = G \quad (2.95)$$

har man, når tensoren  $a$ 's komponenter i det vilkårlige punkt betegnes  $a_{\ell}^k \dots$  i det krumliniede system, at

$$\alpha_{\ell}^k \dots = \beta_{\ell}^k \dots \gamma_{\ell}^n \dots a_n^m \dots \quad (2.96)$$

Heraf fremgår, at tensorfeltet  $a$  har konstante komponenter i et krumliniet koordinatsystem  $y^k$ , når der eksisterer en koordinattransformation

$$\underline{\beta} = GQ, \quad \underline{\gamma} = R/G \quad (2.97)$$

hvor determinanten  $G$  er en funktion af stedet. Hvis komponenterne  $a_{\underline{q}}^k \dots$  er uafhængige af  $\underline{x}$ , og transformation  $Q$  eksisterer, kan man altid konstruere koordinattransformationen (2.97), idet  $G$  da optræder som en integrationsfaktor. Når  $a_{\underline{q}}^k \dots$  afhænger af alle tre koordinater, vil eksistensen af  $Q$  ikke garantere eksistensen af en koordinattransformation (2.97), jf. omtalen af isostatisk flader hos fx Love [27.01], p. 89 og Ericksen [60.09], p. 848.

Et materiale kaldes herefter homogent med hensyn til en egenskab beskrevet ved en tensor  $\underline{a}$ , når der til ethvert punkt eksisterer en drejningstensor  $Q$ , således at

$$Q_{\underline{m}}^k(\underline{x}^m) \dots R_{\underline{q}}^n(\underline{x}^m) \dots a_{\underline{n}}^m \dots (\underline{x}^m) = A_{\underline{q}}^k \dots \quad (2.98)$$

er konstanter. Hvis  $Q_{\underline{q}}^k + \delta_{\underline{q}}^k$  kaldes materialet krumliniet anisotropt, og hvis  $Q_{\underline{q}}^k = \delta_{\underline{q}}^k$  kaldes det retliniet anisotropt.

Det bemærkes, at mens rotationer og translationer er operationer, som kan udføres med ethvert virkeligt materiale, så er dette ikke tilfældet for operationerne inversion og refleksion. Det kan derimod forekomme, at to personer, som udfører tilsvarende forsøg, men benytter modsat orienterede koordinatsystemer, kan konstatere, at inversion og refleksion er symmetrioperationer for det pågældende materiale. Eventuelt kan man ud fra materialets opbygning slutte, at dette må være tilfældet.

## 2.1.9 Oversigt over lineære tensorrelationers symmetriforhold

I en tensorrelation af typen

$$t_{\underline{q}}^k \dots = a_{\underline{q}}^k \dots e_{\underline{m}}^n \dots \quad (2.99)$$

beskrives en materialeegenskab ved tensoren  $\underline{a}$ . Når materialet har visse symmetriegenskaber, tilfredsstiller tensorens komponenter nogle symmetribetingelser

$$a_{\underline{q}}^k \dots = \beta_{\underline{q}}^m \dots \gamma_{\underline{n}}^k \dots a_{\underline{m}}^n \dots \quad (2.100)$$

hvor  $\beta_s^r$  og  $\gamma_s^r$  tilhører en gruppe transformationer, som kaldes materialets symmetrigruppe. En symmetrigruppe omfatter alle de transformationer, for hvilke symmetribetingelserne (2.100) er tilfredsstillet, men for de symmetrirotationer, som er undersøgt i de foregående afsnit, viser det sig, at hver symmetrigruppe kan frembringes af et forholdsvis lille antal frembringertransformationer. Samtlige elementer i symmetrigruppen findes således ved at danne alle de produkter af frembringertransformationerne, som giver forskellige resultater.

I tabel 2.1 er frembringertransformationerne for de i afsnit 2.1.5 og 2.1.6 behandlede symmetrirotationer anført sammen med nogle af de mest anvendte symboler for de tilsvarende krystalklasser samt betegnelserne for de tilsvarende krystalsystemer.

Symmetri- gruppe	Frembringer- transforma- tioner	Hermann- Maugin	Shubnikov	Schoen- flies	Krystal- system
$\{1\ 1\ 1\}$	I	1	1	$C_1$	Triklin
$\{1\ 1\ 2\}$	$R_3^2$	2	2	$C_2$	Monoklin
$\{1\ 1\ 3\}$	$R_3^3$	3	3	$C_3$	Trigonal
$\{1\ 1\ 4\}$	$R_3^4$	4	4	$C_4$	Tetragonal
$\{1\ 1\ \infty\}$	$R_3^\infty$	6	6	$C_6$	Heksagonal
$\{1\ 2\ 2\}$	$R_2^2, R_3^2$	222	2:2	V	Rhombisk
$\{1\ 2\ 3\}$	$R_2^2, R_3^3$	32	3:2	$D_3$	Trigonal
$\{1\ 2\ 4\}$	$R_2^2, R_3^4$	422	4:2	$D_4$	Tetragonal
$\{1\ 2\ \infty\}$	$R_2^2, R_3^\infty$	622	6:2	$D_6$	Heksagonal
$\{1\ 4\ 4\}$	$R_2^4, R_3^4$	432	3/4	O	Kubisk
$\{1\ 1\ 2/3\}$	$R_3^2, R_d^3$	23	3/2	T	Kubisk
$\{\infty\ \infty\ \infty\}$	$R_1^\infty, R_2^\infty, R_3^\infty$	Isotropi			

Tabel 2.1

I tabellen er

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

identitetstransformationen, og

$$R_1^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi & \sin\chi \\ 0 & -\sin\chi & \cos\chi \end{bmatrix}, R_2^n = \begin{bmatrix} \cos\chi & 0 & -\sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\chi & 0 & \cos\chi \end{bmatrix}, R_3^n = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

er rotationer om ortogonale akser  $(1\ 0\ 0)$ ,  $(0\ 1\ 0)$  og  $(0\ 0\ 1)$  med  $\chi = 2\pi/n$ ,  $n = \infty$  angiver en vilkårlig drejningsvinkel. Endelig er

$$R_d^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

en 3-fold drejning om akse  $(1\ 1\ 1)/\sqrt{3}$ .

I tabel 2.2 er for tensorer af op til fjerde orden anført hvilke forskellige symmetrigrupper, disse tensorer kan tilhøre.

$a^k$	$a_\ell^{k\ell}$	$a_m^{k\ell}$	$a_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 1 \quad 1\}$
$b^k$	$b_\ell^{k\ell}$	$b_m^{k\ell}$	$b_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 1 \quad 2\}$
	$c_\ell^{k\ell}$	$c_m^{k\ell}$	$c_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 1 \quad 3\}$
		$d_m^{k\ell}$	$d_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 1 \quad 4\}$
			$e_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 1 \quad \infty\}$
$c^k$	$d_\ell^{k\ell}$	$e_m^{k\ell}$	$f_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 2 \quad 2\}$
	$e_\ell^{k\ell}$	$f_m^{k\ell}$	$g_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 2 \quad 3\}$
		$g_m^{k\ell}$	$h_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 2 \quad 4\}$
			$i_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 2 \quad \infty\}$
	$f_\ell^{k\ell}$	$h_m^{k\ell}$	$j_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 2 \quad 2/3\}$
		$i_m^{k\ell}$	$k_{mn}^{k\ell}$	$\{1 \quad 4 \quad 4\}$
			$l_{mn}^{k\ell}$	$\{\infty \quad \infty \quad \infty\}$

Tabel 2.2

For tensorer af anden og fjerde orden er de forskellige tensorer angivet i henholdsvis afsnit 2.1.5 og appendix H. For førsteordens tensorer er

$$\begin{aligned}
 a^k &= (a^1 \ a^2 \ a^3) \\
 b^k &= (0 \ 0 \ a^3) \\
 c^k &= (0 \ 0 \ 0)
 \end{aligned}
 \tag{2.104}$$

I stedet for som her at angive resultaterne på matrixform, kan man benytte indexnotation. Eksempelvis har man i det isotrope tilfælde, at en andenordens tensor kan angives som

$$a_\ell^k = a \delta_\ell^k \tag{2.105}$$

mens en fjerdeordens tensor kan angives som

$$a_{mn}^{k\ell} = \lambda \delta^{k\ell} \delta_{mn} + \mu \delta_m^k \delta_n^\ell + \nu \delta_n^k \delta_m^\ell \tag{2.106}$$

For de 32 krystalklasser har Lokhin & Sedov [63.02] angivet resultater for tensorer af 1., 2., 3. og 4. orden i denne notation, ligesom Smith & Rivlin [64.03] har tilsvarende resultater.



### 2.1.10 Grafisk repræsentation af tensorkomponenter

Tensortransformationsformlerne

$$a_{\ell}^k \dots = \beta_m^k \dots \gamma_{\ell}^n \dots A_n^m \dots \quad (2.107)$$

er bekvemme at arbejde med, men de giver ikke nogen umiddelbar fornemmelse af, hvorledes den enkelte komponent varierer med en drejning af basisvektorerne. For at få et overblik over denne variation kan man som i det følgende betragte tensorer af anden og fjerde orden. Af hensyn til overskueligheden behandles kun tensorer, som tilhører symmetrigruppen  $\{1 \ 2 \ 2\}$ , komponenterne  $a_{\beta}^{\alpha}$  og  $a_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$  og drejninger om  $\hat{i}_3$ .

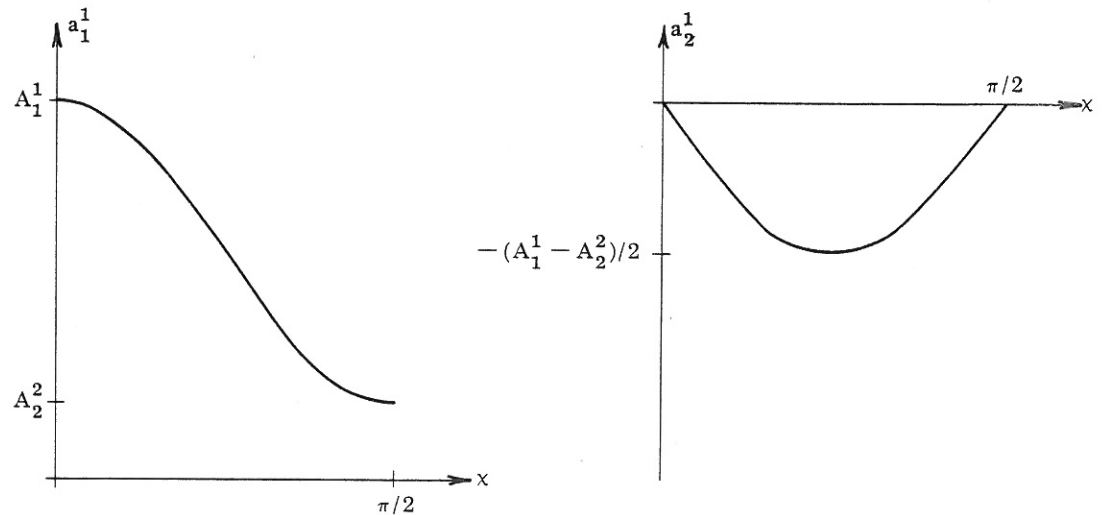
For en andenordens tensor er transformationsformlerne

$$\begin{aligned} a_1^1 &= A_1^1 \cos^2 \chi + A_2^2 \sin^2 \chi \\ a_2^1 &= a_1^2 = -(A_1^1 - A_2^2) \sin \chi \cos \chi \\ a_2^2 &= A_1^1 \sin^2 \chi + A_2^2 \cos^2 \chi \end{aligned} \quad (2.108)$$

Det ses, at

$$\begin{aligned} a_2^2(\chi) &= a_1^1(\chi + \pi/2) \\ a_1^1(-\chi) &= a_1^1(\chi) \\ a_2^1(-\chi) &= -a_2^1(\chi) \end{aligned} \quad (2.109)$$

og det er derfor tilstrækkeligt at afbilde  $a_1^1$  og  $a_2^1$  i intervallet  $0 \leq \chi \leq \pi/2$ . Disse afbildninger er vist i figur 2.1.



Figur 2.1

For en fjerdeordens tensor, for hvilken det yderligere gælder, at

$$a_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = a_{\gamma\delta}^{\beta\alpha} = a_{\delta\gamma}^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \quad (2.110)$$

er transformationsformlerne

$$\begin{aligned} a_{11}^{11} &= A_{11}^{11}c^4 + 2(A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12})s^2c^2 + A_{22}^{22}s^4 \\ a_{12}^{11} &= (A_{11}^{11}c^2 - (A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12})(c^2 - s^2) - A_{22}^{22}s^2)sc \\ a_{22}^{11} &= A_{22}^{11} + (A_{11}^{11} - 2(A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12}) + A_{22}^{22})s^2c^2 \\ a_{12}^{12} &= A_{12}^{12} + (A_{11}^{11} - 2(A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12}) + A_{22}^{22})s^2c^2 \\ a_{22}^{12} &= (A_{11}^{11}s^2 - (A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12})(s^2 - c^2) - A_{22}^{22}c^2)sc \\ a_{22}^{22} &= A_{11}^{11}s^4 + 2(A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12})s^2c^2 + A_{22}^{22}c^4 \end{aligned} \quad (2.111)$$

hvor

$$s = \sin\chi, \quad c = \cos\chi \quad (2.112)$$

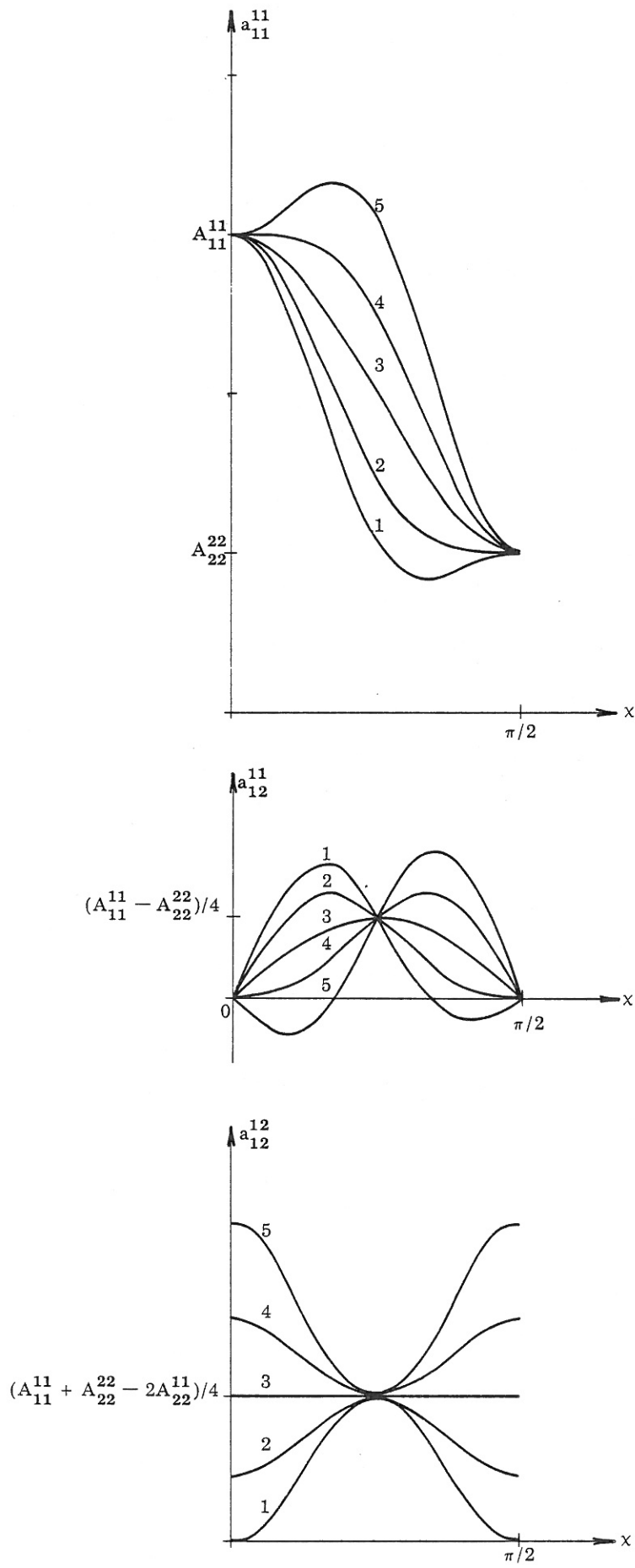
Da man har

$$\begin{aligned} a_{22}^{22}(\chi) &= a_{11}^{11}(\chi + \pi/2) \\ a_{22}^{12}(\chi) &= -a_{12}^{11}(\chi + \pi/2) \\ a_{22}^{11}(\chi) &= a_{12}^{12}(\chi) - A_{12}^{12} + A_{22}^{11} \\ a_{11}^{11}(-\chi) &= a_{11}^{11}(\chi) \\ a_{12}^{11}(-\chi) &= -a_{12}^{11}(\chi) \\ a_{12}^{12}(-\chi) &= a_{12}^{12}(\chi) \end{aligned} \quad (2.113)$$

er det tilstrækkeligt at afbilde  $a_{11}^{11}$ ,  $a_{12}^{11}$  og  $a_{12}^{12}$  i intervallet  $0 \leq \chi \leq \pi/2$ . Dette er vist i figur 2.2.

I figurerne betyder

$$\begin{aligned} 1: & A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12} < A_{22}^{22} < A_{11}^{11} \\ 2: & A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12} = A_{22}^{22} < A_{11}^{11} \\ 3: & A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12} = (A_{11}^{11} + A_{22}^{22})/2, \text{ dvs.} \\ & A_{22}^{22} < A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12} < A_{11}^{11} \\ 4: & A_{22}^{22} < A_{11}^{11} = A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12} \\ 5: & A_{22}^{22} < A_{11}^{11} < A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12} \end{aligned} \quad (2.114)$$



Figur 2.2

Det er værd at bemærke, at værdien af  $a_{11}^{11}$  i retningen  $\chi = 0$  svarende til den ene symmetriakse i  $x^1x^2$ -planen ikke behøver at være den største, ligesom  $a_{11}^{11}$  i retningen  $\chi = \pi/2$  svarende til den anden symmetriakse i  $x^1x^2$ -planen ikke nødvendigvis er den mindste. Heraf ses bl.a. at  $A_{11}^{11} = A_{22}^{22}$  ikke medfører transvers isotropi (hertil kræves yderligere  $A_{22}^{11} + 2A_{12}^{12} = A_{11}^{11}$ ). Yderligere bemærkes, at  $a_{12}^{11}$ , som er nul for  $\chi = 0$  og  $\chi = \pi/2$ , også skifter fortegn for en værdi af  $\chi$  mellem 0 og  $\pi/2$  i tilfældene 1 og 5 efter (2.114). Endelig bemærkes, at for  $a_{12}^{12}$  er  $\hat{i}_3$  ikke en 2-fold, men en 4-fold symmetriakse.

## 2.2 Ikke-lineære tensorrelationer

Hidtil er kun lineære sammenhænge mellem tensorer betragtet, men også når der er tale om ikke-lineære sammenhænge, kan man bestemme de restriktioner, som følger af materialesymmetri. Således fandt Finger [1894.01] i 1894, at spændingstensorens komponenter i det isotrope tilfælde skal være funktioner af tøjningstensorens 3 hovedinvarianter, og v. Mises [28.04] udtrykte i 1928 flydebetingelser for forskellige anisotrope materialer ved forskellige kombinationer af spændingstensorens 5 uafhængige komponenter (kun 5, da v. Mises antog  $\sigma_k^k = 0$ ). Det var dog først efter at Reiner [45.01] og Prager [45.02] i 1945 havde benyttet Cayley-Hamiltons sætning til reduktion af polynomiale spændings-tøjningsrelationer for isotrope materialer, at studiet af ikke-lineære tensorrelationer inden for kontinuummeknikken for alvor begyndte.

Blandt dem, der i denne forbindelse bl.a. benyttede den klassiske invariantteori metoder og resultater, skal nævnes Ericksen, Green, Rivlin, Smith og Spencer, se fx [54.01], [55.06], [57.01], [57.02], [57.03], [58.01] og [71.09], som fandt, at en tensors komponenter for at være invariante under visse transformationer skal være funktioner af bestemte basisinvarianter. Ved udledelsen blev benyttet, at den afhængige tensor enten eksakt eller tilnærmet kunne udtrykkes som et polynomium i de uafhængige tensorer. Pipkin og Wine-man [63.03], [64.01] viste dog i 1963, at resultaterne gælder for mere generelle tensorrelationer.

En anden fremgangsmåde blev i 1967 benyttet af Eringen [67.02], som betragtede skalære funktioner af vektorargumenter under hele den ortogonale gruppe. Chakrabarti og Wainwright [69.08] udvidede senere Eringens metode til også at omfatte funktioner af andenordens tensorer, dog stadig kun for isotrope materialer.

En metode baseret på anvendelse af komplekse akser skal beskrives i det følgende og resultaterne sammenlignes med tidligere fundne.

### 2.2.1 Skalære funktioner af vektorargumenter

Ved en skalær funktion af et vektorargument forstås en skalær størrelse, hvis værdi på en eller anden måde afhænger af vektorens 3 komponenter i et eller andet system af basisvektorer, fx

$$F = f(v^1, v^2, v^3) = f(v^k) \quad (2.115)$$



Ved en drejning af vektoren skifter dennes komponenter værdi fra  $v^k$  til  $v^{*k}$ , og den skalære funktion får værdien

$$F^* = f(v^{*1}, v^{*2}, v^{*3}) \quad (2.116)$$

hvor  $F^*$  og  $F$  normalt vil være forskellige. Såfremt det for en gruppe af drejninger viser sig at  $F = F^*$ , siges funktionen  $f$  at være *forminvariant* under den påvældende gruppe, og som det skal vises, kan  $f$  da kun være en funktion af visse kombinationer af vektorkomponenterne  $v^k$ .

Lad  $A^k$  være en vektors komponenter i et system af ortogonale basisvektorer  $\hat{i}_k$ , hvor  $\hat{i}_3$  benyttes som drejningsakse. I det tilsvarende system af komplekse akser, se appendix G, har vektoren komponenterne  $a^k$  med

$$a^k = b_{\varrho}^k A^{\varrho} \quad (2.117)$$

hvor

$$[b_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

I dette system har den drejede vektor komponenterne  $\alpha^k$  bestemt ved

$$\alpha^k = \beta_{\varrho}^k a^{\varrho} \quad (2.119)$$

hvor

$$[\beta_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} \exp(i\chi) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

For en funktion som er forminvariant under den pågældende drejning gælder da

$$f(\alpha^k) = f(\exp(iq^k \chi) a^k) = f(a^k) \quad (2.121)$$

hvor

$$[q^k] = [q^1 \quad q^2 \quad q^3] = [1 \quad -1 \quad 0] \quad (2.122)$$

I (2.121) er  $f(\exp(iq^k \chi) a^k)$  en funktion af drejningsvinklen  $\chi$ , mens  $f(a^k)$  er uafhængig af  $\chi$ . Man har således

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = \frac{\partial f}{\partial \alpha^k} i q^k \exp(iq^k \chi) a^k = \frac{\partial f}{\partial a^k} i q^k a^k = 0 \quad (2.123)$$

eller, ved multiplikation med  $-i$

$$q^k \frac{\partial f}{\partial a^k} a^k = 0 \quad (2.124)$$

hvor der summeres over  $k$ .

Løsninger til (2.124) er funktioner af et sæt størrelser, basisinvarianter, der bestemmes ved

$$\frac{da^1}{q^1 a^1} = \frac{da^2}{q^2 a^2} = \frac{da^3}{q^3 a^3} \quad (2.125)$$

som med (2.122) bliver

$$\frac{da^1}{a^1} = -\frac{da^2}{a^2} = \frac{da^3}{0} \quad (2.126)$$

med løsningerne

$$J^{12} = a^1 a^2, \quad J^3 = a^3 \quad (2.127)$$

Benyttes (2.118), har man

$$J^{12} = a^1 a^2 = (A^1 + iA^2)(iA^1 + A^2)/2 = i(A^1 A^1 + A^2 A^2)/2 \quad (2.128)$$

og

$$J^3 = a^3 = A^3 \quad (2.129)$$

Da faktoren  $i/2$  i denne forbindelse er uden betydning, har man, at en funktion af størrelserne

$$J^{12} = \delta_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = A^\alpha A_\alpha \quad (2.130)$$

og

$$J^3 = A^3 \quad (2.131)$$

er forminvariant under drejninger om  $\hat{i}_3$ .

Også størrelsen

$$I = A^k A_k = \bar{A} \cdot \bar{A} \quad (2.132)$$

er en sådan funktion, og man har derfor, at funktioner af  $I$  og  $J^3$  er forminvariante. Yderligere er

$$A^3 = \bar{A} \cdot \hat{i}_3 \quad (2.133)$$

og man kan konkludere, at en funktion

$$F = f(\bar{A} \cdot \bar{A}, \bar{A} \cdot \hat{a}) \quad (2.134)$$

er forminvariant under drejninger om  $\hat{a}$ .

Det skal bemærkes, at man frit kan vælge enten  $A^\alpha A_\alpha$  og  $A^3$  eller  $A^k A_k$  og  $A^3$  som basisinvarianter. Man kan derimod ikke benytte  $A^k A_k$  og  $A^\alpha A_\alpha$ , idet fortegnet for  $A^3$  ikke kan bestemmes af

$$A^k A_k = A^\alpha A_\alpha + (A^3)^2 \quad (2.135)$$

Skal en funktion være forminvariant under drejninger om  $\hat{i}_2$ , finder man,

at den skal være en funktion af  $I$  og  $A^2$ . Kræver man nu, at den skal være funktion skal være forminvariant under drejninger om såvel  $\hat{i}_2$  som  $\hat{i}_3$ , ses det, at dette kun er muligt for funktioner af  $I$  alene, dvs.

$$F = f(I) = f(\bar{A} \cdot \bar{A}) \quad (2.136)$$

Herefter betragtes igen drejninger om  $\hat{i}_3$  alene, men nu funktioner af 2 vektorer,  $A$  og  $B$ . Til bestemmelse af basisinvarianterne i dette tilfælde har man

$$\frac{da^1}{a^1} = \frac{-da^2}{a^2} = \frac{da^3}{0} = \frac{db^1}{b^1} = \frac{-db^2}{b^2} = \frac{db^3}{0} \quad (2.137)$$

i alt 5 ligninger til bestemmelse af 5 størrelser. For at undersøge, hvorledes basisinvarianterne kan udvælges, må man systematisere metoden noget. Sættes

$$(a^1 a^2 a^3 b^1 b^2 b^3) = (x^1 x^2 x^3 x^4 x^5 x^6) \quad (2.138)$$

kan de bestemmende ligninger skrives

$$\frac{dx^1}{q^1 x^1} = \frac{dx^2}{q^2 x^2} = \dots = \frac{dx^6}{q^6 x^6} \quad (2.139)$$

I de tilfælde, hvor  $q^K$  og  $q^L$  er forskellige fra nul, bliver en af ligningerne

$$\frac{dx^K}{q^K x^K} = \frac{dx^L}{q^L x^L} \quad (2.140)$$

med løsningen

$$(x^K)^{1/q^K} = J^{KL} (x^L)^{1/q^L} \quad (2.141)$$

eller

$$J^{KL} = (x^K)^{1/q^K} (x^L)^{-1/q^L} \quad (2.142)$$

hvor  $J^{KL}$  er en arbitrær konstant. Af den samme ligning fås

$$J^{LK} = (x^L)^{1/q^L} (x^K)^{-1/q^K} \quad (2.143)$$

således, at

$$J^{KL} J^{LK} = 1 \quad (2.144)$$

Man har endvidere umiddelbart

$$J^{KL} J^{LM} = J^{KM} \quad (2.145)$$

I de tilfælde, hvor  $q^N$  er lig med nul, bliver en af ligningerne

$$dx^N = 0 \quad (2.146)$$

med løsningen

$$J^N = x^N \quad (2.147)$$

Med den netop indførte notation har man, idet alle  $J^{KL}$  og  $J^N$  opskrives, bortset fra  $J^{LK} = 1/J^{KL}$

$$\begin{aligned}
 J^{12} &= (A^1 A^1 + A^2 A^2) i/2 = A^\alpha A_\alpha i/2 \\
 J^3 &= A^3 \\
 J^{14} &= (A^1 + iA^2)/(B^1 + iB^2) \\
 &= (A^1 B^1 + A^2 B^2 - i(A^1 B^2 - A^2 B^1))/(B^1 B^1 + B^2 B^2) \\
 &= (A^\alpha B_\alpha - i e_{3kl} A^k B^l)/B^\alpha B_\alpha \\
 J^{15} &= (A^1 B^2 - A^2 B^1 + i(A^1 B^1 + A^2 B^2))/2 \\
 &= (e_{3kl} A^k B^l + i A^\alpha B_\alpha)/2 \\
 J^{42} &= (e_{3kl} A^l B^k + i A^\alpha B_\alpha)/2 \\
 J^{25} &= (iB^1 + B^2)/(iA^1 + A^2) \\
 &= (A^1 B^1 + A^2 B^2 - i(A^1 B^2 - A^2 B^1))/(A^1 A^1 + A^2 A^2) \\
 &= (A^\alpha B_\alpha - i e_{3kl} A^k B^l)/A^\alpha A_\alpha \\
 J^{45} &= B^\alpha B_\alpha i/2 \\
 J^6 &= B^3
 \end{aligned} \tag{2.148}$$

Heri indgår de 6 størrelser

$$\begin{aligned}
 A^\alpha A_\alpha, A^3, A^\alpha B_\alpha, e_{3kl} A^k B^l &= -e_{3kl} A^l B^k, \\
 B^\alpha B_\alpha \text{ og } B^3
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

hvoraf dog kun 5 er uafhængige. Således gælder fx

$$J^{45} = J^{42} J^{15} / J^{12} \tag{2.150}$$

eller

$$B^\alpha B_\alpha i/2 = -((A^\alpha B_\alpha)^2 + (e_{3kl} A^k B^l)^2)/2i A^\alpha A_\alpha \tag{2.151}$$

dvs.

$$B^\alpha B_\alpha = ((A^\alpha B_\alpha)^2 + (e_{3kl} A^k B^l)^2)/A^\alpha A_\alpha \tag{2.152}$$

Af den sidste ligning fremgår, at mens  $B^\alpha B_\alpha$  entydigt kan udtrykkes ved de 3 størrelser på højresiden, kan hverken  $A^\alpha B_\alpha$  eller  $e_{3kl} A^k B^l$  entydigt udtrykkes ved de 3 andre, idet fortegnet ikke kan bestemmes. Man kan således benytte

$$A^\alpha A_\alpha, A^3, A^\alpha B_\alpha, e_{3kl} A^k B^l \text{ og } B^3 \tag{2.153}$$

som basisinvarianter ved drejninger om  $\hat{i}_3$  og enhver funktion

$$F = f(A^\alpha A_\alpha, A^3, A^\alpha B_\alpha, e_{3kl} A^k B^l, B^3) \tag{2.154}$$

er forminvariant under disse drejninger. Af hensyn til sammenligning med drejninger om andre akser betragtes relationerne

$$\begin{aligned} A^k A_k &= A^\alpha A_\alpha + (A^3)^2 \\ A^k B_k &= A^\alpha B_\alpha + A^3 B_3 \end{aligned} \quad (2.155)$$

som viser, at man i stedet kan benytte

$$A^k A_k, A^3, A^k B_k, B^3 \text{ og } e_{3k\ell} A^k B^\ell \quad (2.156)$$

som basisinvarianter.

Ved drejning om  $\hat{i}_2$  fås tilsvarende basisinvarianterne

$$A^k A_k, A^2, A^k B_k, B^2 \text{ og } e_{2k\ell} A^k B^\ell \quad (2.157)$$

I begge tilfælde kan kvadratet på den sidste invariant udtrykkes ved  $B^k B_k$ , og man må derfor benytte basisinvarianterne

$$A^k A_k, A^k B_k, B^k B_k \quad (2.158)$$

når der er tale om drejninger om 2 eller flere akser.

I symbolsk notation kan basisinvarianterne i (2.157) ved drejning om en akse  $\hat{a}$  angives som

$$\bar{A} \cdot \bar{A}, \bar{A} \cdot \hat{a}, \bar{A} \cdot \bar{B}, \bar{B} \cdot \hat{a} \text{ og } \bar{A} \times \bar{B} \cdot \hat{a} \quad (2.159)$$

og basisinvarianterne i (2.158) ved

$$\bar{A} \cdot \bar{A}, \bar{A} \cdot \bar{B}, \bar{B} \cdot \bar{B} \quad (2.160)$$

Udtrykkene kan uden videre udvides til at omfatte 3 eller flere vektorer.

Ovenstående fremgangsmåde kan kun benyttes, når drejningsvinklen  $\chi$  er en uindskrænket variabel, som kan antage alle værdier. Når  $\chi$  kun kan antage diskrete værdier, må metoden modificeres noget. Skrives transformationsformlerne

$$\alpha^k = \lambda^k a^k \quad (2.161)$$

hvor

$$\lambda^k = L^k \quad (2.162)$$

og  $L^k$  er konstanter, er betingelsen for forminvarians

$$f(a^k) = f(\alpha^k) = f(\lambda^k a^k) \quad (2.163)$$

Dannes funktionen

$$\varphi(a^k, \lambda^k) = f(\lambda^k a^k) + \mu_\ell (\lambda^\ell - L^\ell) = f(a^k) \quad (2.164)$$

hvor  $\mu_\ell$  er konstanter, kan man i denne behandle  $\lambda^k$  som kontinuerte variable og udtrykke, at

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^k} = 0 \quad (2.165)$$



Herved fås for hvert  $L^k$  en ligning af formen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^m} = 0 = \frac{\partial f}{\partial \alpha^k} \frac{\partial \alpha^k}{\partial \lambda^m} + \mu_m \quad (2.166)$$

Har man eksempelvis  $\lambda^k = 1$  svarende til en drejningsvinkel  $\chi = 2\pi$  fås

$$A^1 \frac{\partial f}{\partial A^1} + A^2 \frac{\partial f}{\partial A^2} + A^3 \frac{\partial f}{\partial A^3} + \mu = 0 \quad (2.167)$$

hvis løsninger bestemmes ved integralerne til

$$\frac{dA^1}{A^1} = \frac{dA^2}{A^2} = \frac{dA^3}{A^3} = \frac{df}{\mu} \quad (2.168)$$

Heraf fås, at

$$A^1, A^2 \text{ og } A^3 \quad (2.169)$$

kan benyttes som basisinvarianter. Med

$$\lambda^1 = \lambda^2 = -1 \text{ og } \lambda^3 = 1 \quad (2.170)$$

svarende til  $\chi = \pi$ , fås

$$-A^1 \frac{\partial f}{\partial A^1} - A^2 \frac{\partial f}{\partial A^2} + \mu_1 = 0 \quad (2.171)$$

$$A^3 \frac{\partial f}{\partial A^3} + \mu_2 = 0$$

og dermed, at

$$(A^1)^2, A^1 A^2 \text{ og } A^3 \quad (2.172)$$

kan benyttes som basisinvarianter.

Med  $\chi = 2\pi/n$  svarer disse to eksempler til  $n = 1$  og  $n = 2$ . Det bemærkes, at der i de to eksempler ikke er benyttet komplekse akser, idet drejningsmatricen allerede i det oprindelige akse-system er en diagonalmatrix. For  $n = 3, 4, \dots$  må man benytte komplekse akser, og resultatet bliver som for  $\chi$  kontinuert.

Da udtrykkene til bestemmelse af en drejet vektors komponenter fuldstændig svarer til udtrykkene for en koordinattransformation, kan forminvarians under drejning af vektorargumenter opfattes som forminvarians under specielle koordinattransformationer, de egentlige ortogonale transformationer. Også uegentlige ortogonale transformationer har interesse i denne forbindelse, specielt inversion og refleksioner. I begge tilfælde benyttes komponenterne i det oprindelige akse-system.

Ved en inversion er  $\lambda^k = -1$ , og man finder, at

$$(A^1)^2, A^1 A^2, A^1 A^3 \quad (2.173)$$

kan benyttes som basisinvarianter.

Ved en refleksion i  $x^2 x^3$ -planen er  $\lambda^1 = -1, \lambda^2 = \lambda^3 = 1$ , og

$$(A^1)^2, A^2, A^3 \quad (2.174)$$

kan benyttes som basisinvarianter.

### 2.2.2 Vektorfunktioner af vektorargumenter

En vektorfunktion af et vektorargument kan på komponentform skrives

$$v^l = f^l(u^k) \quad (2.175)$$

Ved en drejning af vektoren  $\bar{u}$  føres denne over i  $\bar{u}^*$ , og  $\bar{v}$  udregnet efter (2.175) bliver til  $\bar{v}^*$  med komponenterne

$$v^{*l} = f^l(u^{*k}) \quad (2.176)$$

Er drejningen bestemt ved tensoren  $\beta^k_l$ , har man

$$u^{*k} = \beta^k_l u^l \quad (2.177)$$

og såfremt man også har

$$v^{*k} = \beta^k_l v^l \quad (2.178)$$

dvs.

$$f^l(\beta^k_m u^m) = \beta^l_n f^n(u^p) \quad (2.179)$$

siges vektorfunktionen  $f^l(u^k)$  at være forminvariant under denne drejning.

For at undersøge hvilke restriktioner funktionen  $f^l$  påføres af forminvarians kan man danne skalaren  $F$  som

$$F = v^l a_l \quad (2.180)$$

hvor  $a_l$  er en arbitrær vektor.  $F$  bliver herved en forminvariant, skalær funktion af de to vektorer  $\bar{u}$  og  $\bar{a}$  og dermed en funktion af et sæt basisinvarianter  $I^\alpha$ , hvor  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , og hvor eksempelvis  $N = 5$  i det tilfælde, hvor der er tale om vilkårlige drejninger om en akse, jf. (2.153).

Af (2.180) fremgår, at komponenterne  $v^l$  bestemmes ved

$$v^l = \partial F / \partial a_l \quad (2.181)$$

som, da  $F$  er en funktion af  $I^\alpha$ , kan udregnes som

$$v^l = (\partial F / \partial I^\alpha) (\partial I^\alpha / \partial a_l) \quad (2.182)$$

Da  $v^l$  er en funktion af  $u^k$  alene, og ikke af den arbitrære vektor  $a_k$ , må  $I^\alpha$  vælges, så  $a_k$  indgår i højst første potens, og  $\partial F / \partial I^\alpha$  vil være funktioner alene af de basisinvarianter, som ikke indeholder  $a_k$ , men udelukkende  $u^l$ .

Betragtes vilkårlige drejninger om  $\hat{i}_3$  og basisinvarianterne

$$\begin{aligned} I^1 &= u^1 u_1, \quad I^2 = u^3 \\ I^3 &= u^1 a_1, \quad I^4 = a_3, \quad I^5 = e_{3k2} u^k a^2 \end{aligned} \quad (2.183)$$

har man

$$\begin{aligned}\partial I^3 / \partial a_\alpha &= u^\alpha, \quad \partial I^4 / \partial a_\alpha = \delta_\alpha^3 \\ \partial I^5 / \partial a_\alpha &= e_{3kn} \delta^{\alpha n} u^k\end{aligned}\quad (2.184)$$

hvorefter  $v^\alpha$  kan skrives

$$v^\alpha = \varphi_3 u^\alpha + \varphi_4 \delta_\alpha^3 + \varphi_5 e_{3kn} \delta^{\alpha n} u^k \quad (2.185)$$

hvor funktionerne

$$\varphi_\beta = \partial F / \partial I^\beta, \quad \beta = 3, 4, 5 \quad (2.186)$$

er funktioner af basisinvarianterne  $I^1$  og  $I^2$  alene.

Multipliceres (2.185) med basisvektorerne  $\hat{i}_\alpha$ , fås på symbolsk form

$$\bar{v} = \varphi_3 \bar{u} + \varphi_4 \hat{i}_3 + \varphi_5 \bar{u} \times \hat{i}_3 \quad (2.187)$$

Af (2.185) fås endvidere på matrixform

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_3 & -\varphi_5 & 0 \\ \varphi_5 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 + \varphi_4 / u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

hvor koefficientmatricen er i overensstemmelse med det lineære tilfælde, se (2.57). Forskellen er blot den, at i (2.57) er matricens elementer konstanter, mens de i (2.188) er funktioner af  $I^1$  og  $I^2$ .

Skal  $\bar{v}$  være en isotrop funktion af  $\bar{u}$ , får man umiddelbart

$$\bar{v} = \varphi \bar{u} \quad (2.189)$$

hvor

$$\varphi = \varphi(\bar{u} \cdot \bar{u}) \quad (2.190)$$

### 2.2.3 Skalære funktioner af tensorargumenter

Som et eksempel på en skalær funktion af tensorer betragtes en funktion af en andenordens tensor med komponenterne  $A_\alpha^k$  i et akse-system, hvis tredieakse  $\hat{i}_3$  er en symmetriakse. Henført til komplekse akser er komponenterne, se (2.78)

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_1^1 + A_2^2 + i(A_2^1 - A_1^2)) & \frac{1}{2}(A_2^1 + A_1^2 + i(A_1^1 - A_2^2)) & (A_3^1 - iA_3^2)/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}(A_2^1 + A_1^2 - i(A_1^1 - A_2^2)) & \frac{1}{2}(A_1^1 + A_2^2 - i(A_2^1 - A_1^2)) & (A_3^2 - iA_3^1)/\sqrt{2} \\ (A_1^3 + iA_2^3)/\sqrt{2} & (A_2^3 + iA_1^3)/\sqrt{2} & A_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.191)$$

Under en vilkårlig drejning om  $\hat{i}_3$  føres disse komponenter over i

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 e^{-2ix} & a_3^1 e^{-ix} \\ a_1^2 e^{2ix} & a_2^2 & a_3^2 e^{ix} \\ a_1^3 e^{ix} & a_2^3 e^{-ix} & a_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.192)$$

og med

$$\begin{aligned} (x^1 \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8 \ x^9) = \\ (a_1^1 \ a_2^1 \ a_1^2 \ a_2^2 \ a_3^1 \ a_1^3 \ a_2^3 \ a_3^2 \ a_3^3) \end{aligned} \quad (2.193)$$

bestemmes basisinvarianterne ved

$$\frac{dx^1}{0} = -\frac{dx^2}{2x^2} = \frac{dx^3}{2x^3} = \frac{dx^4}{0} = -\frac{dx^5}{x^5} = \frac{dx^6}{x^6} = \frac{dx^7}{x^7} = -\frac{dx^8}{x^8} = \frac{dx^9}{0} \quad (2.194)$$

Som basisinvarianter vælges først følgende uafhængige, komplekse størrelser

$$\begin{aligned} J^1 &= x^1 = \frac{1}{2}(A_1^1 + A_2^2 + i(A_2^1 - A_1^2)) \\ J^4 &= x^4 = \frac{1}{2}(A_1^1 + A_2^2 - i(A_2^1 - A_1^2)) \\ J^9 &= x^9 = A_3^3 \\ J^{65} &= x^6 x^5 = \frac{1}{2}(A_1^3 + iA_2^3)(A_3^1 - iA_3^2) \\ J^{78} &= x^7 x^8 = \frac{1}{2}(A_3^2 - iA_3^1)(A_2^3 + iA_1^3) \\ J^{75} &= x^7 x^5 = \frac{1}{2}(A_3^2 - iA_3^1)(A_3^1 - iA_3^2) \\ J^{358} &= x^3 x^5 x^8 = \frac{1}{4}(A_2^1 + A_1^2 - i(A_1^1 - A_2^2))(A_3^1 - iA_3^2)(A_2^3 + iA_1^3) \\ J^{267} &= x^2 x^6 x^7 = \frac{1}{4}(A_2^1 + A_1^2 + i(A_1^1 - A_2^2))(A_1^3 + iA_2^3)(A_3^2 - iA_3^1) \end{aligned} \quad (2.195)$$

som entydigt erstattes af de reelle

$$\begin{aligned}
I^1 &= J^1 + J^4 = A_\alpha^\alpha \\
I^2 &= i(J^4 - J^1) = A_2^1 - A_1^2 = e_{3k\ell} \delta^{m\ell} A_m^k \\
I^3 &= J^9 = A_3^3 \\
I^4 &= J^{65} + J^{78} = A_1^3 A_3^1 + A_2^3 A_3^2 = A_\alpha^3 A_3^\alpha \\
I^5 &= i(J^{78} - J^{65}) = A_2^3 A_3^1 - A_1^3 A_3^2 = e_{3k\ell} \delta^{m\ell} A_m^3 A_3^k \\
I^6 &= 2iJ^{75} = (A_3^1)^2 + (A_3^2)^2 = \delta_{\alpha\beta} A_3^\alpha A_3^\beta \\
I^7 &= 2(J^{358} + J^{267}) = A_\alpha^3 A_3^\beta A_\beta^\alpha - e_{3k\ell} e^{3np} \delta^{lm} \delta_{nq} A_m^3 A_3^q A_p^k = \\
&= (A_2^1 + A_1^2)(A_1^3 A_3^2 + A_2^3 A_3^1) + (A_1^1 - A_2^2)(A_1^3 A_3^1 - A_2^3 A_3^2) \\
I^8 &= 2i(J^{267} - J^{358}) = (e_{3mn} \delta^{k\ell} + e^{3\ell k} \delta_{nm}) A_k^3 A_3^n A_\ell^m = \\
&= (A_2^1 + A_1^2)(A_1^3 A_3^1 - A_2^3 A_3^2) - (A_1^1 - A_2^2)(A_1^3 A_3^2 + A_2^3 A_3^1)
\end{aligned} \tag{2.196}$$

De tre hovedinvarianter

$$\begin{aligned}
I &= A_k^k \\
II &= \frac{1}{2} e^{k\ell m} e_{pqm} A_k^p A_\ell^q \\
III &= \frac{1}{6} e^{k\ell m} e_{pqr} A_k^p A_\ell^q A_m^r
\end{aligned} \tag{2.197}$$

udtrykkes ved basisinvarianterne  $I^\gamma$ ,  $\gamma = 1, 2, \dots, 8$ , som

$$\begin{aligned}
I &= J^1 + J^4 + J^9 = I^1 + I^3 \\
II &= J^1 J^4 - J^{32} + J^4 J^9 - J^{78} + J^9 J^1 - J^{65} = \\
&= \frac{1}{4} ((I^1)^2 + (I^2)^2 - \frac{(I^7)^2 + (I^8)^2}{(I^4)^2 + (I^5)^2}) + I^1 I^3 - I^4 \\
III &= J^1 J^4 J^9 + J^{267} + J^{358} - J^1 J^{78} - J^4 J^{65} - J^9 J^{32} = \\
&= \frac{1}{4} ((I^1)^2 + (I^2)^2 - \frac{(I^7)^2 + (I^8)^2}{(I^4)^2 + (I^5)^2}) I^3 + \frac{1}{2} (I^7 - I^1 I^4 - I^2 I^5)
\end{aligned} \tag{2.198}$$

idet

$$J^{32} = J^{358} J^{267} / J^{65} J^{78} = \frac{1}{4} ((I^7)^2 + (I^8)^2) / ((I^4)^2 + (I^5)^2) \tag{2.199}$$

Af ovenstående udtryk fremgår, at man entydigt kan erstatte  $I^1$  og  $I^3$  med  $I$  og  $I^3$ , men  $I^7$  og  $I^8$  kan ikke entydigt erstattes af  $II$  og  $III$ . Ganske vist kan  $I^7$  udtrykkes som

$$I^7 = 2(III - I^3 II) + (I^1 - 2I^3)I^4 + I^2 I^5 + 2I^1 (I^3)^2 \tag{2.200}$$

men da  $I^8$  indgår i anden potens, kan man ikke bestemme fortegnet for denne invariant ud fra kendskabet til  $I$ ,  $II$ ,  $III$  og  $I^\gamma$ ,  $\gamma = 2, 3, \dots, 6$ .

I tilfældet  $A_{\lambda}^k = A_k^{\lambda}$  har man

$$I^2 = I^5 = 0, \quad I^4 = I^6 \quad (2.201)$$

og man kan derfor benytte  $I^1, I^3, I^4, I^7$  og  $I^8$  som basisinvarianter. Sædvanligvis, se fx Rivlin [70.04], anføres som basisinvarianter I, II, III,  $I^3$  og  $I^4$ , hvilket i henhold til ovenstående ikke er korrekt. Da en forminvariant funktion af en tensor  $\underline{A}$  er en funktion af tensorens basisinvarianter  $I_A^{\gamma}$ , vil den samme funktion af en anden tensor  $\underline{B}$  antage samme værdi, når de to tensorer har samme basisinvarianter,  $I_A^{\gamma} = I_B^{\gamma}$ . Som et eksempel på, at man ikke kan benytte I, II, II,  $I^3$  og  $I^4$  som basisinvarianter, betragtes

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\underline{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.202)$$

For begge tensorer er

$$\begin{aligned} I_A &= I_B = 4 \\ II_A &= II_B = 3 \\ III_A &= III_B = -1 \\ I_A^3 &= I_B^3 = 1 \\ I_A^4 &= I_B^4 = 2 \end{aligned} \quad (2.203)$$

men

$$I_A^8 = -2 \quad \text{og} \quad I_B^8 = +2 \quad (2.204)$$

Problemet vedrørende valg af basisinvarianter er yderligere omtalt i afsnit 2.2.5.

Skal en skalær funktion være forminvariant under vilkårlige drejninger om enhver akse, finder man, at den skal være en funktion af de tre netop omtalte hovedinvarianter.

Herefter betragtes en funktion af 2 tensorargumenter  $\underline{A}$  og  $\underline{B}$ , forminvariant under vilkårlige drejninger om  $\hat{i}_3$ . Ud over de 8 basisinvarianter (2.195) eller (2.196) skal man nu medtage yderligere 9. Med

$$\begin{aligned} & (x^1 x^2 x^3 x^4 x^5 x^6 x^7 x^8 x^9 x^{10} x^{11} x^{12} x^{13} x^{14} x^{15} x^{16} x^{17} x^{18}) = \\ & (a_1^1 a_2^1 a_1^2 a_2^2 a_3^1 a_3^2 a_2^3 a_3^3 b_1^1 b_2^1 b_1^2 b_2^2 b_3^1 b_3^2 b_2^3 b_3^3) \end{aligned} \quad (2.205)$$

bliver de bestemmende ligninger

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{0} &= -\frac{dx^2}{2x^2} = \frac{dx^3}{2x^3} = \frac{dx^4}{0} = -\frac{dx^5}{x^5} = \frac{dx^6}{x^6} = \frac{dx^7}{x^7} = -\frac{dx^8}{x^8} = \frac{dx^9}{0} = \\ \frac{dx^{10}}{0} &= -\frac{dx^{11}}{2x^{11}} = \frac{dx^{12}}{dx^{12}} = \frac{dx^{13}}{0} = -\frac{dx^{14}}{x^{14}} = \frac{dx^{15}}{x^{15}} = \frac{dx^{16}}{x^{16}} = -\frac{dx^{17}}{x^{17}} = \frac{dx^{18}}{0} \end{aligned} \quad (2.206)$$



Heraf fremgår, at man skal medtage

$$J^{10} = x^{10}, J^{13} = x^{13} \text{ og } J^{18} = x^{18} \quad (2.207)$$

eller

$$\begin{aligned} I^9 &= J^{10} + J^{13} = B_1^1 + B_2^2 = B_\alpha^\alpha \\ I^{10} &= i(J^{13} - J^{10}) = B_2^1 - B_1^2 = e_{3k\ell} \delta^{p\ell} B_p^k \\ I^{11} &= J^{18} = B_3^3 \end{aligned} \quad (2.208)$$

mens de 6 øvrige vælges blandt

$$\begin{aligned} J^{311} &= x^3 x^{11}, J^{6711} = x^6 x^7 x^{11}, J^{122} = x^{12} x^2, J^{1258} = x^{12} x^5 x^8 \\ J^{614} &= x^6 x^{14}, J^{714} = x^7 x^{14}, J^{155} = x^{15} x^5, J^{158} = x^{15} x^8 \\ J^{165} &= x^{16} x^5, J^{168} = x^{16} x^8, J^{617} = x^6 x^{17}, J^{717} = x^7 x^{17} \end{aligned} \quad (2.209)$$

idet kun invarianter indeholdende  $\underline{B}$ 's komponenter i højst første potens ønskes. Uafhængige basisinvarianter vælges blandt følgende

$$\begin{aligned} I^{12} &= 2(J^{311} + J^{122}) & 2(J^{6711} + J^{1258}) \\ I^{13} &= 2i(J^{122} - J^{311}) & 2i(J^{1258} - J^{6711}) \end{aligned} \quad \text{eller} \quad (2.210)$$

$$\begin{aligned} I^{14} &= J^{614} + J^{168} & J^{714} - J^{165} \\ I^{15} &= i(J^{168} - J^{614}) & i(J^{714} + J^{165}) \end{aligned} \quad \text{eller} \quad (2.211)$$

$$\begin{aligned} I^{16} &= J^{155} + J^{717} & J^{158} - J^{617} \\ I^{17} &= i(J^{717} - J^{155}) & -i(J^{158} + J^{617}) \end{aligned} \quad \text{eller} \quad (2.212)$$

I næste afsnit benyttes

$$\begin{aligned} I^{12} &= 2(J^{6711} + J^{1258}) = A_\alpha^3 A_3^\beta B_\beta^\alpha - e_{3mp} \delta^{pk} e^{3q\ell} \delta_{qn} A_k^3 A_3^n B_\ell^m \\ I^{13} &= 2i(J^{1258} - J^{6711}) = (e_{3mn} \delta^{k\ell} + e^{3\ell k} \delta_{nm}) A_k^3 A_3^n B_\ell^m \\ I^{14} &= J^{614} + J^{168} = A_\alpha^3 B_3^\alpha \\ I^{15} &= i(J^{168} - J^{614}) = e_{3\ell k} \delta^{km} A_m^3 B_3^\ell \\ I^{16} &= J^{155} + J^{717} = A_3^\alpha B_\alpha^3 \\ I^{17} &= i(J^{717} - J^{155}) = e^{3k\ell} \delta_{km} A_3^m B_\ell^3 \end{aligned} \quad (2.213)$$

sammen med de ovenfor anførte  $I^\gamma$ ,  $\gamma = 1, 2, \dots, 11$ .

### 2.2.4 Tensorfunktioner af tensorargumenter

I lighed med definitionen af en forminvariant vektorfunktion defineres for andenordens tensorers vedkommende en forminvariant tensorfunktion

$$t_{\ell}^k = f_{\ell}^k(A_n^m) \quad (2.214)$$

ved

$$f_{\ell}^k(\beta_m^r \gamma_s^n A_n^m) = \beta_p^k \gamma_{\ell}^q f_q^p(A_n^m) \quad (2.215)$$

hvor  $\beta$  og  $\gamma = \beta^{-1}$  bestemmer en symmetridrejning. De restriktioner, som pålægges funktionen ved (2.215) udtrykkes eksplicit ved at danne skalaren

$$F = f_{\ell}^k B_k^{\ell} \quad (2.216)$$

hvor  $B$  er en arbitrær tensor, hvorefter  $t_{\ell}^k$  bestemmes ved

$$t_{\ell}^k = \partial F / \partial B_k^{\ell} = (\partial F / \partial I^{\gamma})(\partial I^{\gamma} / \partial B_k^{\ell}) \quad (2.217)$$

For de i afsnit 2.2.3 behandlede symmetridrejninger har man

$$\begin{aligned} \partial I^9 / \partial B_n^m &= \delta_m^{\alpha} \delta_{\alpha}^n \\ \partial I^{10} / \partial B_n^m &= e_{3m\ell} \delta^{n\ell} \\ \partial I^{11} / \partial B_n^m &= \delta_m^3 \delta_3^n \\ \partial I^{12} / \partial B_n^m &= \delta_m^{\alpha} \delta_{\beta}^n A_{\alpha}^3 A_3^{\beta} + e_{3mp} e^{3qn} \delta^{pk} \delta_{q\ell} A_k^3 A_3^{\ell} \\ \partial I^{13} / \partial B_n^m &= (e_{3m\ell} \delta^{kn} + e^{3nk} \delta_{\ell m}) A_k^3 A_3^{\ell} \\ \partial I^{14} / \partial B_n^m &= A_{\alpha}^3 \delta_m^{\alpha} \delta_3^n \\ \partial I^{15} / \partial B_n^m &= e_{3mk} \delta^{kp} A_p^3 \delta_3^n \\ \partial I^{16} / \partial B_n^m &= \delta_m^3 \delta_{\alpha}^n A_3^{\alpha} \\ \partial I^{17} / \partial B_n^m &= e^{3kn} \delta_{k\ell} A_3^{\ell} \delta_m^3 \end{aligned} \quad (2.218)$$

hvorefter  $t_m^n$  kan skrives

$$\begin{aligned} t_m^n &= \psi_9 \delta_m^{\alpha} \delta_{\alpha}^n + \psi_{10} e_{3m\ell} \delta^{n\ell} + \psi_{11} \delta_m^3 \delta_3^n \\ &+ \psi_{12} (\delta_m^{\alpha} \delta_{\beta}^n A_{\alpha}^3 A_3^{\beta} + e_{3mp} e^{3qn} \delta^{pk} \delta_{q\ell} A_k^3 A_3^{\ell}) \\ &+ \psi_{13} (e_{3m\ell} \delta^{kn} + e^{3nk} \delta_{\ell m}) A_k^3 A_3^{\ell} \\ &+ \psi_{14} \delta_m^{\alpha} \delta_3^n A_{\alpha}^3 + \psi_{15} e_{3mk} \delta^{k\ell} \delta_3^n A_{\ell}^3 \\ &+ \psi_{16} \delta_{\alpha}^n \delta_m^3 A_3^{\alpha} + \psi_{17} e^{3kn} \delta_{k\ell} \delta_m^3 A_3^{\ell} \end{aligned} \quad (2.219)$$

hvor

$$\psi_\alpha = \partial F / \partial I^\alpha, \quad \alpha = 9, 10, \dots, 17 \quad (2.220)$$

er funktioner af  $I^\gamma$ ,  $\gamma = 1, 2, \dots, 8$ , alene.

Skal funktionen være forminvariant under vilkårlige drejninger om enhver akse, finder man

$$t_m^n = \varphi_1 \delta_m^n + \varphi_2 A_m^n + \varphi_3 A_l^n A_m^l \quad (2.221)$$

hvor  $\varphi_\alpha$  er funktioner af de tre hovedinvarianter, se (2.197). Sammenholdt med (2.219) er

$$\varphi_1 = \psi_9, \quad \varphi_2 = \psi_{14} + \psi_{16}, \quad \varphi_3 = \psi_{12} \quad (2.222)$$

Da  $A_k^n A_l^k A_m^l$  er en funktion af  $A_m^n$ , kan (2.221) benyttes til at udlede en tensorspondant til Cayley-Hamiltons sætning for matricer.

Metoden kan i princippet udvides til at omfatte tensorer af vilkårlig orden. Har man

$$t^{mn\dots} = f^{mn\dots}(u^{kl\dots}) \quad (2.223)$$

hvor  $f^{mn\dots}$  er forminvariant under en symmetrigruppe givet ved  $\beta_r^s$ , dvs.

$$f^{mn\dots}(\beta_k^r \beta_l^s \dots u^{kl\dots}) = \beta_p^m \beta_q^n \dots f^{pq\dots}(u^{kl\dots}) \quad (2.224)$$

kan man danne skalaren  $F$  som

$$F = f^{mn\dots} b_{mn\dots} \quad (2.225)$$

hvor  $b$  er en arbitrær tensor af samme orden som  $t$ . Herefter bestemmes  $t^{mn\dots}$  som

$$t^{mn\dots} = \partial F / \partial b_{mn\dots} = (\partial F / \partial I_\gamma)(\partial I_\gamma / \partial b_{mn\dots}) = \varphi^\gamma g_\gamma^{mn\dots} \quad (2.226)$$

hvor  $\varphi^\gamma$  er funktioner af et sæt basisinvarianter for  $\underline{u}$  under den pågældende symmetrigruppe, og  $g_\gamma^{mn\dots}$  er funktioner af  $u_{mn\dots}$ .

Det bemærkes, at metoden kun kan benyttes, når  $t$  eksplicit kan udtrykkes som funktion af  $\underline{u}$  og i øvrigt af et vilkårligt antal tensorer. For implicit givne relationer kendes for tiden ingen resultater.

### 2.2.5 Valg af basisinvarianter

At valget af basisinvarianter blandt de forekommende muligheder ikke er ligegyldigt, er for en funktion af to vektorer vist i afsnit 2.2.1 og for en funktion af en andenordens tensor i afsnit 2.2.3. Af de ligninger, der er benyttet til bestemmelse af basisinvarianterne, fremgår endvidere, at antallet af uafhængige basisinvarianter er begrænset til at være højst antallet af uafhængige komponenter i argumenttensorerne. Hvorledes disse to forhold er behandlet i den eksisterende litteratur skal omtales i det følgende.

I den eksisterende litteratur, se fx Rivlin [70.04] og Spencer [71.09], er fremgangsmåden ofte den, at et sæt invarianter, en integritetsbasis, bestemmes og et antal relationer, såkaldte syzygier, mellem disse opstilles. Når der er tale om forminvariant, skalær funktion af en andenordens tensor  $A_k^k = A_k^l$  under de forskellige krystalsymmetrier, har Smith [62.03] vist, at en polynomial funktion kan skrives

$$F = S_0 + S_\alpha I^\alpha + S_{\alpha\beta} I^\alpha I^\beta \quad (2.227)$$

hvor  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$

$N$  er antallet af invarianter i integritetsbasen.

$S_0, S_\alpha$  og  $S_{\alpha\beta}$  er polynomier i 6 uafhængige invarianter  $I^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, 6$ .

Resultaterne i afsnit 2.2.1 og 2.2.3 viser, at en sådan funktion kan udtrykkes som

$$F = f(I^\alpha), \alpha = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.228)$$

hvor  $I^\alpha$  er specielt udvalgte basisinvarianter.

Som et eksempel betragtes det monokline krystalsystem, hvor basisinvarianter for en anden ordens tensor skal vælges blandt de syv størrelser

$$A_1^1, A_2^2, A_3^3, A_3^2, (A_1^3)^2, (A_2^1)^2, A_1^3 A_2^1 \quad (2.229)$$

Vælges de 6 første, kan den syvende ikke entydigt udtrykkes ved disse, idet

$$A_1^3 A_2^1 = \pm ((A_1^3)^2 (A_2^1)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.230)$$

og man må benytte Smiths udtryk (2.227). Vælges derimod de fem første og den syvende, har man entydigt

$$(A_2^1)^2 = (A_1^3 A_2^1)^2 / (A_1^3)^2 \quad (2.231)$$

og man kan benytte (2.228).

Skal  $F$  være et polynomium, bliver der således tale om et polynomium i  $I^\alpha$  og  $1/I^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, 6$ .

## 2.2.6 Ikke-lineære tensorrelationer på tilvækstform

Ved behandling af problemer som involverer ikke-lineære materialer, vil man ofte være i den situation, at man af én eller flere årsager er nødt til at arbejde med konstitutive ligninger på tilvækstform (inkremental form). Det er derfor nødvendigt at undersøge, hvilke former tensorrelationer får, når de skrives på tilvækstform. Et sammenligningsgrundlag skaffer man sig ved først at betragte en lineær sammenhæng

$$t^{mn} \dots = c_{k\ell}^{mn} \dots u^{k\ell} \dots \quad (2.232)$$

som umiddelbart fører til

$$dt^{mn} \dots = c_{k\ell}^{mn} \dots du^{k\ell} \dots \quad (2.233)$$

da komponenterne  $c_{k\ell}^{mn} \dots$  er konstanter. Materialesymmetrien er således fastlagt én gang for alle ved  $\underline{c}$ 's symmetrigruppe.

Helt anderledes stiller sagen sig, når der er tale om ikke-lineære konstitutive ligninger. Idet det forudsættes, at den konstitutive ligning kan skrives på den tidligere behandlede form

$$t^{mn} \dots = f^{mn} \dots (u^{k\ell} \dots) \quad (2.234)$$

hvor  $f$  er forminvariant under en symmetrigruppe, har man

$$dt^{mn} \dots = (\partial f^{mn} \dots / \partial u^{k\ell} \dots) du^{k\ell} \dots \quad (2.235)$$

som med

$$a_{k\ell}^{mn} \dots \equiv \partial f^{mn} \dots / \partial u^{k\ell} \dots \quad (2.236)$$

kan skrives

$$dt^{mn} \dots = a_{k\ell}^{mn} \dots du^{k\ell} \dots \quad (2.237)$$

Udtrykket (2.237) viser, at sammenhængen mellem de to tilvækster er lineær, men i modsætning til de tidligere behandlede lineære sammenhænge er komponenterne  $a_{k\ell}^{mn} \dots$  ikke konstanter, men funktioner af bl.a. et sæt basisinvarianter for  $\underline{u}$ . Da tensoren  $a$  er af samme orden som  $\underline{c}$ , skal de to tensors symmetrigrupper dog søges i den samme mængde af mulige symmetri-grupper.

Den konstitutive ligning (2.234) kan som vist i afsnit 2.15 skrives

$$t^{mn} \dots = \varphi^\alpha g_\alpha^{mn} \dots \quad (2.238)$$

hvor  $\varphi^\alpha$  er funktioner af et sæt basisinvarianter  $I_\beta$  for  $\underline{u}$ , og  $g_\alpha^{mn} \dots$  er funktioner af  $u^{k\ell} \dots$ . Tensoren  $a$  er derfor bestemt ved

$$a_{k\ell}^{mn} \dots = \varphi^\alpha \partial g_\alpha^{mn} \dots / \partial u^{k\ell} \dots + (\partial \varphi^\alpha / \partial I_\beta) (\partial I_\beta / \partial u^{k\ell} \dots) g_\alpha^{mn} \dots \quad (2.239)$$

Som et eksempel betragtes en isotrop anden ordens tensorfunktion af en anden ordens tensor  $u^{k\ell} = u^{2k}$ . I afsnit 2.2.4 er vist, at en sådan funktion kan skrives

$$t^{mn} = \varphi^1 \delta^{mn} + \varphi^2 u^{mn} + \varphi^3 \delta_{rs} u^{mr} u^{sn} \quad (2.240)$$

hvor  $\varphi^\alpha$  er funktioner af hovedinvarianterne

$$\begin{aligned} I &= u^k_k \\ II &= \frac{1}{2} e^{k\ell m} e_{pqm} u^p_k u^q_\ell \\ III &= \frac{1}{6} e^{k\ell m} e_{pqr} u^p_k u^q_\ell u^r_m \end{aligned} \quad (2.241)$$

Under hensyn til

$$u^{mn} = u^{nm} \quad (2.242)$$

skrives (2.240)

$$t^{mn} = \varphi^1 \delta^{mn} + \frac{1}{2} \varphi^2 (u^{mn} + u^{nm}) + \frac{1}{4} \varphi^3 \delta_{rs} (u^{mr} + u^{rm}) (u^{sn} + u^{ns}) \quad (2.243)$$

og man finder

$$\begin{aligned} \partial g_1^{mn} / \partial u^{k\ell} &= 0 \\ \partial g_2^{mn} / \partial u^{k\ell} &= \frac{1}{2} (\delta_k^m \delta_\ell^n + \delta_k^n \delta_\ell^m) \\ \partial g_3^{mn} / \partial u^{k\ell} &= \frac{1}{2} (\delta_k^m u_\ell^n + \delta_\ell^m u_k^n + \delta_\ell^n u_k^m + \delta_k^n u_\ell^m) \end{aligned} \quad (2.244)$$

Med

$$\begin{aligned} \partial I / \partial u^{k\ell} &= \delta_{k\ell} \\ \partial II / \partial u^{k\ell} &= I \delta_{k\ell} - u_{k\ell} \\ \partial III / \partial u^{k\ell} &= II \delta_{k\ell} - I u_{k\ell} + u_{\ell m} u_k^m \end{aligned} \quad (2.245)$$

fås

$$\begin{aligned} a_{k\ell}^{mn} &= \partial t^{mn} / \partial u^{k\ell} \\ &= \frac{1}{2} \varphi^2 (\delta_k^m \delta_\ell^n + \delta_k^n \delta_\ell^m) + \lambda^1 \delta_{k\ell} \delta^{mn} \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi^3 (\delta_k^m u_\ell^n + \delta_\ell^m u_k^n + \delta_\ell^n u_k^m + \delta_k^n u_\ell^m) \\ &\quad - \mu^1 \delta^{mn} \delta_{kp} u_\ell^p + \lambda^2 \delta_{k\ell} \delta^{mp} u_p^m \\ &\quad + \nu^1 \delta^{mn} \delta_{\ell q} u_r^q u_k^r - \mu^2 \delta_{p\ell} \delta^{qn} u_k^p u_q^m + \lambda^3 \delta_{k\ell} \delta^{np} u_s^m u_p^s \\ &\quad + \nu^2 \delta^{np} \delta_{\ell q} u_p^m u_r^q u_k^r - \mu^3 \delta_{kp} \delta^{nq} u_\ell^p u_s^m u_q^s \\ &\quad + \nu^3 \delta_{\ell q} \delta^{nr} u_p^q u_k^p u_s^m u_r^s \end{aligned} \quad (2.246)$$

hvor

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha &= \varphi_I^\alpha + \varphi_{II}^\alpha I + \varphi_{III}^\alpha II \\ \mu^\alpha &= \varphi_{II}^\alpha + \varphi_{III}^\alpha I \\ \nu^\alpha &= \varphi_{III}^\alpha \end{aligned} \quad (2.247)$$

og

$$\begin{aligned} \varphi_I^\alpha &= \partial \varphi^\alpha / \partial I \\ \varphi_{II}^\alpha &= \partial \varphi^\alpha / \partial II \\ \varphi_{III}^\alpha &= \partial \varphi^\alpha / \partial III \end{aligned} \quad (2.248)$$

Transformeres til det aksestystem i hvilket

$$u_2^1 = u_3^2 = u_1^3 = 0 \quad (2.249)$$



finder man, at man på matrixform kan angive tensoren  $a_{kl}^{mn}$  som

$$[a_{kl}^{mn}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & a_{22}^{11} & 0 & 0 & 0 & a_{33}^{11} \\ 0 & a_{12}^{12} & 0 & a_{21}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{13}^{13} & 0 & 0 & 0 & a_{31}^{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12}^{21} & 0 & a_{21}^{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11}^{22} & 0 & 0 & 0 & a_{22}^{22} & 0 & 0 & 0 & a_{33}^{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23}^{23} & 0 & a_{32}^{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13}^{31} & 0 & 0 & 0 & a_{31}^{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23}^{32} & 0 & a_{32}^{32} & 0 \\ a_{11}^{33} & 0 & 0 & 0 & a_{22}^{33} & 0 & 0 & 0 & a_{33}^{33} \end{bmatrix} \quad (2.250)$$

hvor

$$\begin{aligned} a_{KK}^{KK} &= \varphi^2 + \lambda^1 + (2\varphi^3 - \mu^1 + \lambda^2)u_K^K + (\nu^1 - \mu^2 + \lambda^3)(u_K^K)^2 \\ &\quad + (\nu^2 - \mu^3)(u_K^K)^3 + \nu^3(u_K^K)^4 \end{aligned} \quad (2.251)$$

$$a_{KM}^{KM} = \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi^3(u_M^M + u_K^K) = a_{MK}^{KM} = a_{MK}^{MK}, \quad K \neq M \quad (2.252)$$

$$\begin{aligned} a_{KK}^{MM} &= \lambda^1 - \mu^1 u_K^K + \lambda^2 u_M^M + \nu^1 (u_K^K)^2 - \mu^2 u_K^K u_M^M + \lambda^3 (u_M^M)^2 \\ &\quad + \nu^2 u_M^M (u_K^K)^2 - \mu^3 u_K^K (u_M^M)^2 + \nu^3 (u_K^K)^2 (u_M^M)^2, \quad K \neq M \end{aligned} \quad (2.253)$$

Ved at sammenligne med matricerne i appendix H ser man, at  $a_{kl}^{mn}$  tilhører symmetrigruppe  $\{1 \ 2 \ 2\}$ , hvilket betyder, at materialet opfører sig som et ortotrop materiale over for tilvækster.

Den her behandlede form for anisotropi betegnes *påvirkningsinduceret anisotropi*.

Da  $u^{mn}$  i det generelle tilfælde varierer fra punkt til punkt, må materialet opfattes som værende inhomogent og krumliniet anisotrop i denne sammenhæng.

Betingelsen for, at tensoren  $a_{kl}^{mn}$  er isotrop for vilkårlige værdier af  $u^{mn}$ , er

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= 0 \\ \mu^1 &= \mu^2 = \mu^3 = 0 \\ \lambda^2 &= \lambda^3 = 0 \\ \nu^1 &= \nu^2 = \nu^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.254)$$

hvilket udtrykker, at  $\tilde{t}$  skal være en lineær funktion af  $\underline{u}$  med  $\varphi^2$  konstant og  $\varphi^1$  en funktion af  $I$  alene.

Man kan heraf slutte, at for ikke-lineære materialer vil symmetriforholdene ændre sig med påvirkningen, når tilvækster i påvirkningen betragtes.

### 3. LINEÆR ELASTICITETSTEORI FOR ANISOTROPE MATERIALER

Ved en lineær elasticitetsteori forstås i dette afsnit en teori baseret på følgende:

a) Tøjnings- flytningsrelationerne er lineære, dvs.

$$\epsilon_{k\ell} = \frac{1}{2} (\partial u_k / \partial x^\ell + \partial u_\ell / \partial x^k) \quad (3.1)$$

hvor  $\epsilon_{k\ell}$  er den infinitesimale tøjningstensor,  $u_k$  er flytningsvektoren og  $x^k$  er koordinaterne til en partikel i legemets deformerede tilstand.

b) Der er så lille forskel på den udeformerede og den deformerede tilstand, at man i ligevægtsligningerne

$$\partial \sigma^{k\ell} / \partial x^\ell + \rho f^k = 0 \quad (3.2)$$

ikke skelner mellem de forskellige spændingstensorer. I (3.2) regnes massefylden  $\rho$  og massekraften  $f^k$  konstante under deformationen.

c) Relationen mellem spændinger og tøjninger regnes lineær, dvs.

$$\sigma^{mn} = C_{k\ell}^{mn} \epsilon^{k\ell} \quad (3.3)$$

og

$$\epsilon^{mn} = S_{k\ell}^{mn} \sigma^{k\ell} \quad (3.4)$$

Begge tensorer  $\underline{C}$  og  $\underline{S}$  betegnes elasticitetstensorer.

Ofte benyttes betegnelserne *stivhedstensor* for  $\underline{C}$  og *fleksibilitets- eller eftergivelighedstensor* for  $\underline{S}$ . (På engelsk benyttes stiffness for  $\underline{C}$  og compliance for  $\underline{S}$ ).

På grund af symmetrierne  $\epsilon_{mn} = \epsilon_{nm}$  og  $\sigma^{k\ell} = \sigma^{\ell k}$  anføres ofte blot sammenhængen mellem de uafhængige komponenter. Indføres samtidig de såkaldte tekniske konstanter, har man ifølge Lekhnitskii [50.01].

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} \\ \varphi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{xx} & -\nu_{yx}/E_{xx} & -\nu_{zx}/E_{xx} & \eta_{yz,x}/E_{xx} & \eta_{zx,x}/E_{xx} & \eta_{xy,x}/E_{xx} \\ -\nu_{xy}/E_{yy} & 1/E_{yy} & -\nu_{zy}/E_{yy} & \eta_{yz,y}/E_{yy} & \eta_{zx,y}/E_{yy} & \eta_{xy,y}/E_{yy} \\ -\nu_{xz}/E_{zz} & -\nu_{yz}/E_{zz} & 1/E_{zz} & \eta_{yz,z}/E_{zz} & \eta_{zx,z}/E_{zz} & \eta_{xy,z}/E_{zz} \\ \eta_{x,yz}/G_{yz} & \eta_{y,yz}/G_{yz} & \eta_{z,yz}/G_{yz} & 1/G_{yz} & \mu_{zx,yz}/G_{yz} & \mu_{xy,yz}/G_{yz} \\ \eta_{x,zx}/G_{zx} & \eta_{y,zx}/G_{zx} & \eta_{z,zx}/G_{zx} & \mu_{yz,zx}/G_{zx} & 1/G_{zx} & \mu_{xy,zx}/G_{zx} \\ \eta_{x,xy}/G_{xy} & \eta_{y,xy}/G_{xy} & \eta_{z,xy}/G_{xy} & \mu_{yz,xy}/G_{xy} & \mu_{zx,xy}/G_{xy} & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

hvor  $E$ 'erne,  $\nu$ 'erne og  $G$ 'erne som sædvanlig betegnes elasticitetskoefficienter, Poissonske forhold og forskydningsmoduler.  $\mu$ 'erne kalder Lekhnitskii Chentsov koefficienter, mens  $\eta_{yz,x} \dots \eta_{xy,z}$  kaldes »gensidige influenskoefficienter af første art» og  $\eta_{x,yz} \dots \eta_{z,xy}$  kaldes »gensidige influenskoefficienter af anden art». Matricen i (3.5) er symmetrisk om hoveddiagonalen, hvilket medfører så mange relationer, at der i det mest anisotrope tilfælde kun er 21 uafhængige koefficienter.

For det generelle tilfælde, dvs. treaksede spændings- og deformationstilstande og vilkårligt anisotrope materialer kendes ikke andre effektive løsningsmetoder end numeriske. Når problemerne enten eksakt eller tilnærmet kan reduceres til at være todimensionale er det imidlertid muligt at udvikle visse analytiske løsningsmetoder. Dette er således gjort for vridning af prismatiske bjælker og for de plane spændings- og deformationstilstande. I de fleste tilfælde benyttes kompleks funktionsteori ved løsningen. Teorien blev bl.a. udviklet af Lekhnitskii [50.01], [56.01] og Savin [51.05], på grundlag af Kolosovs og Muskhelishvili's [54.05] arbejde med isotrope materialer. Også Green [54.02] deltog i denne udvikling, som hovedsagelig fandt sted i 1930'erne. Løsningerne omfatter især problemer vedrørende skiver og plader med huller. En oversigt findes i Sendekyj [75.06].

### 3.1 Plane spændingstilstande

Anisotrope materialer udviser som regel en opførsel, der afviger fra den der kendes fra isotrope materialer. Disse afvigelser skal i dette afsnit belyses ved nogle eksempler.

#### 3.1.1 Homogene, plane spændingstilstande

I en plan spændingstilstand bestemmes tøjningerne  $\epsilon_{\alpha\beta}$  ved

$$\epsilon_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} \quad (3.6)$$

som, når spændingerne og dermed tøjningerne er konstante, umiddelbart giver flytningerne

$$u_{\alpha} = A_{\alpha\beta} x^{\beta} + B_{\alpha} \quad (3.7)$$

hvor  $A_{\alpha\beta}$  og  $B_{\alpha}$  er konstanter. I figurerne 3.1 - 3.3 er benyttet

$$B_{\alpha} = 0 \Leftrightarrow u_{\alpha} = 0 \text{ for } x^{\beta} = 0 \quad (3.8)$$

samt

$$u_{2,1} = A_{21} = 0 \quad (3.9)$$

hvorved man har

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \epsilon_{11} x^1 + 2\epsilon_{12} x^2 = S_{11\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} x^1 + 2S_{12\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} x^2 \\ u_2 &= \epsilon_{22} x^2 = S_{22\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} x^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

For isotrope materialer er

$$S_{\alpha\beta\kappa\lambda} = \frac{1}{E} ((1 + \nu) \delta_{\alpha\kappa} \delta_{\beta\lambda} - \nu \delta_{\alpha\beta} \delta_{\kappa\lambda}) \quad (3.11)$$

så man får

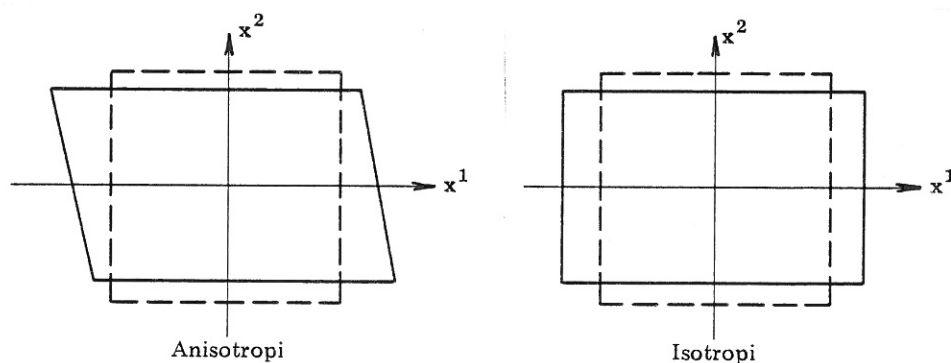
$$\left. \begin{aligned} Eu_1 &= (\sigma^{11} - \nu\sigma^{22})x^1 + 2(1 + \nu)\sigma^{12}x^2 \\ Eu_2 &= (\sigma^{22} - \nu\sigma^{11})x^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

*Enakset træk*

Sættes

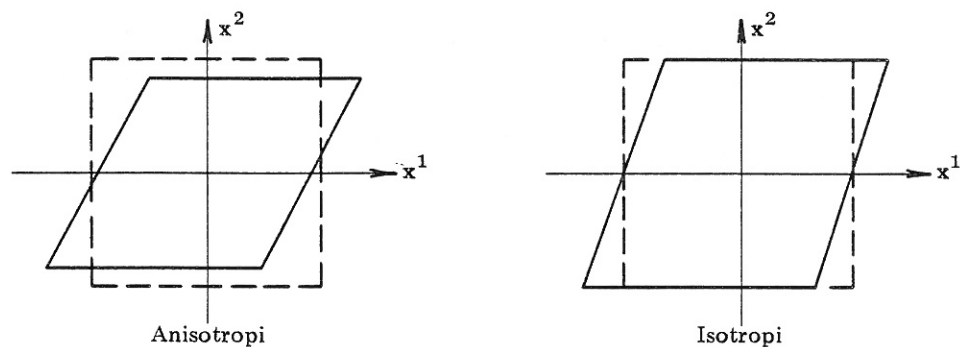
$$\sigma^{11} = \sigma \quad \text{og} \quad \sigma^{12} = \sigma^{21} = 0, \quad 0 < \sigma \quad (3.13)$$

har man enakset træk i  $x^1$ -retningen. Flytningstilstanden er vist i figur 3.1. Det ses, at man udover længdetøjninger også får tværtøjninger i det anisotrope tilfælde.



Figur 3.1

### Forskydning



Figur 3.2

Sættes

$$\sigma^{12} = \tau \quad \text{og} \quad \sigma^{11} = \sigma^{22} = 0, \quad 0 < \tau \quad (3.14)$$

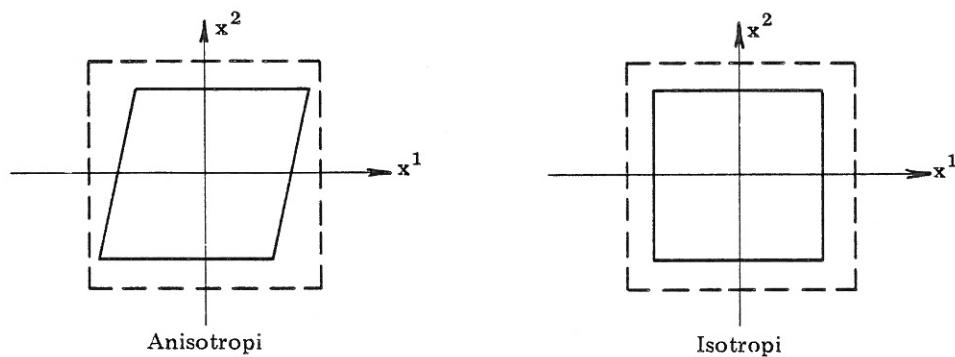
er spændingstilstanden ren forskydning. Flytningstilstanden er vist i figur 3.2. Det ses, at der udover tværtøjninger også forekommer længdetøjninger i begge koordinatretninger i det anisotrope tilfælde.

### Hydrostatisk tryk

Sættes

$$\sigma^{11} = \sigma^{22} = -p \quad \text{og} \quad \sigma^{12} = 0, \quad 0 < p \quad (3.15)$$

kaldes spændingstilstanden hydrostatisk tryk. Flytningstilstanden er vist i figur 3.3. Det ses, at længdetøjningerne i de to akseretninger ikke er lige store samt at der forekommer tværtøjninger i det anisotrope tilfælde.



Figur 3.3

### 3.1.2 Ikke-homogene, plane spændingstilstande

Til løsning af plane, statiske spændingsproblemer kan man, se appendix F, bytte enten

$$c^{\kappa\lambda\alpha\beta} u_{\alpha,\beta\kappa} = 0 \quad (3.16)$$

eller

$$e^{\alpha\gamma} e^{\beta\delta} e^{\kappa\mu} e^{\lambda\nu} S_{\alpha\beta\kappa\lambda} \varphi_{,\mu\nu\gamma\delta} = 0 \quad (3.17)$$

De i litteraturen beskrevne løsningsmetoder er for langt de flestes vedkommende baseret på (3.17), som skrevet helt ud lyder

$$\begin{aligned} S_{2222} \varphi_{,1111} - 4S_{1222} \varphi_{,1112} + 2(S_{1122} + 2S_{1212}) \varphi_{,1122} \\ - 4S_{1112} \varphi_{,1222} + S_{1111} \varphi_{,2222} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

eller, med  $x^1 = x$  og  $x^2 = y$

$$\begin{aligned} S_{2222} \partial^4 \varphi / \partial x^4 - 4S_{1222} \partial^4 \varphi / \partial x^3 \partial y + 2(S_{1122} + 2S_{1212}) \partial^4 \varphi / \partial x^2 \partial y^2 \\ - 4S_{1112} \partial^4 \varphi / \partial x \partial y^3 + S_{1111} \partial^4 \varphi / \partial y^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ligning (3.19) kan skrives

$$D_1 D_2 D_3 D_4 \varphi = 0 \quad (3.20)$$

hvor

$$D_\alpha = \partial / \partial y - \mu_\alpha \partial / \partial x, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (3.21)$$

og

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 &= S_{2222} / S_{1111} \\ \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 \mu_4 + \mu_3 \mu_4 \mu_1 + \mu_4 \mu_1 \mu_2 &= 4S_{1222} / S_{1111} \\ \mu_1 \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \mu_3 \mu_4 + \mu_4 \mu_1 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 \\ &= 2(S_{1122} + 2S_{1212}) / S_{1111} \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= 4S_{1112} / S_{1111} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Af (3.22) fremgår, at  $\mu$ 'erne er rødder i fjerdegradsligningen

$$\begin{aligned} S_{1111} \mu^4 - 4S_{1112} \mu^3 + 2(S_{1122} + 2S_{1212}) \mu^2 \\ - 4S_{1222} \mu + S_{2222} = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Som vist af Lekhnitskii [50.01] kan (3.23) i den her betragtede sammenhæng kun have komplekse eller rent imaginære rødder. Da komplekse rødder altid optræder parvis således, at når  $\mu = a + ib$  er rod, vil også den kompleks konjugerede  $\bar{\mu} = a - ib$  være rod, benyttes betegnelserne  $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1$  og  $\bar{\mu}_2$  for disse rødder.



Ligning (3.20) kan integreres, og med betegnelserne

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y, \quad \bar{z}_1 = x + \bar{\mu}_1 y, \quad \bar{z}_2 = x + \bar{\mu}_2 y \quad (3.24)$$

kan løsningen angives som

$$\varphi = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_3(\bar{z}_1) + \varphi_4(\bar{z}_2) \quad (3.25)$$

når  $\mu_1$  og  $\mu_2$  er forskellige, dvs.

$$\mu_1 = a + ib, \quad \mu_2 = c + id, \quad a \neq c \text{ og/eller } b \neq d \quad (3.26)$$

Når rødderne  $\mu_1$  og  $\mu_2$  er ens, dvs.

$$\mu_1 = \mu_2 = a + ib \quad (3.27)$$

kan løsningen til (3.20) angives som

$$\varphi = \varphi_1(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2(z_1) + \varphi_3(\bar{z}_1) + z_1 \varphi_4(\bar{z}_1) \quad (3.28)$$

I løsningerne (3.25) og (3.28) er  $\varphi_\alpha$  arbitrære funktioner af de anførte argumenter.

Bestemmelse af rødderne  $\mu_\alpha$  i (3.23) er særlig simpel, hvis  $S_{1112} = S_{1222} = 0$ , da man i dette tilfælde blot skal løse en andengradsligning i  $\mu^2$ . Det har derfor interesse at undersøge, om man ved at dreje x,y-systemet kan bestemme et koordinatsystem i hvilket  $S_{1112} = S_{1222} = 0$ .

Ved hjælp af transformationsformlerne for tensorer af fjerde orden, se appendix H, og simple trigonometriske relationer finder man

$$\begin{aligned} S'_{1112} &= \frac{1}{4} (S_{1111} - S_{2222}) \sin 2\theta + \frac{1}{2} (S_{1112} + S_{1222}) \cos 2\theta \\ &\quad + \frac{1}{8} (S_{1111} - 2S_{1122} - 4S_{1212} + S_{2222}) \sin 4\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} (S_{1112} - S_{1222}) \cos 4\theta \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} S'_{1222} &= \frac{1}{4} (S_{1111} - S_{2222}) \sin 2\theta + \frac{1}{2} (S_{1112} + S_{1222}) \cos 2\theta \\ &\quad - \frac{1}{8} (S_{1111} - 2S_{1122} - 4S_{1212} + S_{2222}) \sin 4\theta \\ &\quad - \frac{1}{2} (S_{1112} - S_{1222}) \cos 4\theta \end{aligned} \quad (3.30)$$

hvor  $S'$  er komponenterne i det drejede koordinatsystem, og  $\theta$  er drejningsvinklen.

De to komponenter bliver nul for

$$\begin{aligned} \text{og} \quad \text{tg } 2\theta &= 2(S_{1112} + S_{1222}) / (S_{2222} - S_{1111}) \\ \text{tg } 4\theta &= 4(S_{1222} - S_{1112}) / (S_{1111} - 2S_{1122} - 4S_{1212} + S_{2222}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Betingelsen for at de to ligninger bestemmer samme vinkel  $\theta$ , er

$$\text{tg } 4\theta = 2 \text{tg } 2\theta / (1 - \text{tg}^2 2\theta) \quad (3.32)$$

eller

$$\begin{aligned}
 & (S_{1112} + S_{1222})(S_{1111} - S_{2222})(S_{1111} - 2S_{1122} - 4S_{1212} + S_{2222}) \\
 & = (S_{1112} - S_{1222})(S_{1111} - S_{2222} - 2S_{1112} - 2S_{1222}) \cdot \\
 & (S_{1111} - S_{2222} + 2S_{1112} + 2S_{1222}) \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Nogle symmetrigrupper, for hvilke de to komponenter er nul i et cartesisk koordinatsystem, findes i appendix H. Der er i de fleste tilfælde tale om ortotrope materialer. Da metoden kræver kendskab til spændingsfunktionens værdier på randen af det betragtede område, og da disse kun lader sig bestemme forholdsvis simpelt, når der udelukkende er tale om randbetingelser udtrykt ved spændinger, skal metoden ikke nærmere diskuteres her, idet også løsninger til problemer med foreskrevne randflytninger ønskes.

Herefter betragtes derfor (3.16), som skrevet helt ud lyder

$$\begin{aligned}
 & c^{111\lambda}u_{1,11} + (c^{1\lambda 12} + c^{11\lambda 2})u_{1,12} + c^{12\lambda 2}u_{1,22} + c^{1\lambda 12}u_{2,11} \\
 & + (c^{1\lambda 12} + c^{12\lambda 2})u_{2,12} + c^{\lambda 222}u_{2,22} = 0 \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

eller, med  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $u_1 = u$  og  $u_2 = v$

$$\begin{aligned}
 & c^{1111}\partial^2 u / \partial x^2 + 2c^{1112}\partial^2 u / \partial x \partial y + c^{1212}\partial^2 u / \partial y^2 + c^{1112}\partial^2 v / \partial x^2 \\
 & + (c^{1122} + c^{1212})\partial^2 v / \partial x \partial y + c^{1222}\partial^2 v / \partial y^2 = 0
 \end{aligned}$$

og (3.35)

$$\begin{aligned}
 & c^{1112}\partial^2 u / \partial x^2 + (c^{1212} + c^{1122})\partial^2 u / \partial x \partial y + c^{1222}\partial^2 u / \partial y^2 + c^{1212}\partial^2 v / \partial x^2 \\
 & + 2c^{1222}\partial^2 v / \partial x \partial y + c^{2222}\partial^2 v / \partial y^2 = 0
 \end{aligned}$$

Med  $c^{1112} = c^{1222} = 0$ , jf. det ovenfor anførte vedrørende  $S_{1112} = S_{1222} = 0$ , kan de to variable  $u$  og  $v$  separeres, og man finder, at både  $u$  og  $v$  skal tilfredsstille

$$\begin{aligned}
 & c^{1111}c^{1212}\partial^4 u_\alpha / \partial x^4 + (c^{1111}c^{2222} - c^{1122}(c^{1122} + 2c^{1212}))\partial^4 u_\alpha / \partial^2 x \partial^2 y \\
 & + c^{1212}c^{2222}\partial^4 u_\alpha / \partial y^4 = 0 \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

dvs. ligninger af samme type som (3.19) med  $S_{1112} = S_{1222} = 0$ . Er der specielt tale om et isotropt materiale, reduceres såvel (3.36) som (3.19) til den biharmoniske ligning.

Ligningssystemet (3.35) med tilhørende randbetingelser kan løses ved numeriske metoder. I rapport 8012 er beskrevet en løsningsmetode, som kan benyttes for rektangulære områder. Metoden er baseret på differensligninger. Som et eksempel betragtes en rektangulær skive, hvis ene korte side er fastholdt mod flytninger, mens den modstående side påtvinges en flytning i skivens længderetning, dvs.

$$u(0, y) = v(0, y) = 0$$

$$u(\ell, y) = \epsilon \ell \quad (3.37)$$

$$v(\ell, y) = 0$$

I figur 3.4 er flytningstilstanden vist, og i figur 3.5 er spændingerne i nogle snit optegnet.

Det anvendte materiale har i det benyttede x,y-system

$$c^{1111} = 65422$$

$$c^{1112} = 28825$$

$$c^{1122} = 17380$$

$$c^{1212} = 21336$$

$$c^{1222} = 6076$$

$$c^{2222} = 13706$$

svarende til et ortotrop materiale med hovedretninger drejet  $30^\circ$  i forhold til x,y-systemet. I materialets hovedaksesystem er

$$c^{1111} = 106540$$

$$c^{1112} = 0$$

$$c^{1122} = 2120$$

$$c^{1212} = 6005$$

$$c^{1222} = 0$$

$$c^{2222} = 3109$$

De påtvungne randflytninger svarer ret nøje til de flytninger, som påføres et prøvelegeme ved et forsøg, som har til formål at bestemme nogle af et materials elasticitetskonstanter. Ved behandling af forsøgsresultater antager man ofte, at såvel spændings- som tøjningstilstanden er homogen inden for et forholdsvis stort måleområde. Som det fremgår af figurene 3.4 - 3.5, forekommer der ikke noget område, hvor man kan regne spændings- og tøjningstilstanden homogen, selv i dette tilfælde, hvor længden er så stor som 7 gange bredden.

En tilnærmet analytisk løsning til det samme problem er fundet af Pagano & Halpin [68.02]. Tilnærmelsen ligger deri, at ikke randbetingelserne (3.37), men derimod

$$u(0, 0) = v(0, 0) = 0$$

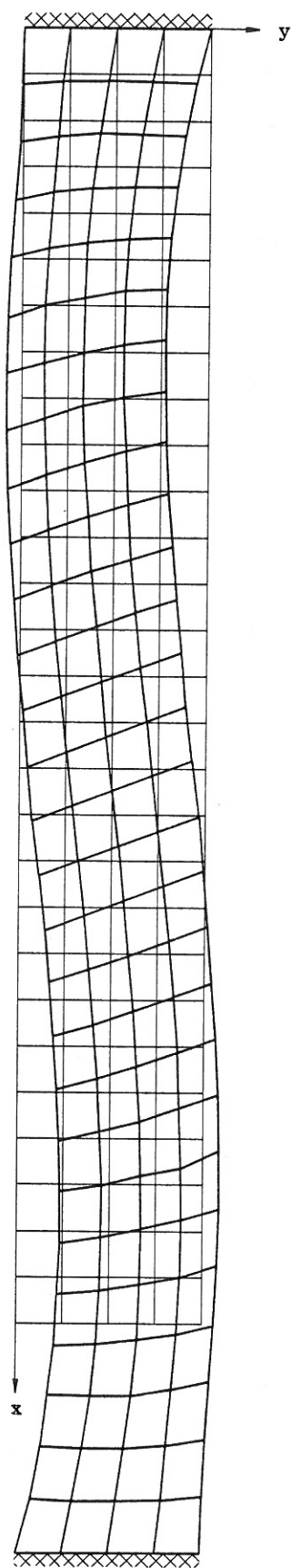
$$u(\ell, 0) = \epsilon \ell$$

$$v(\ell, 0) = 0$$

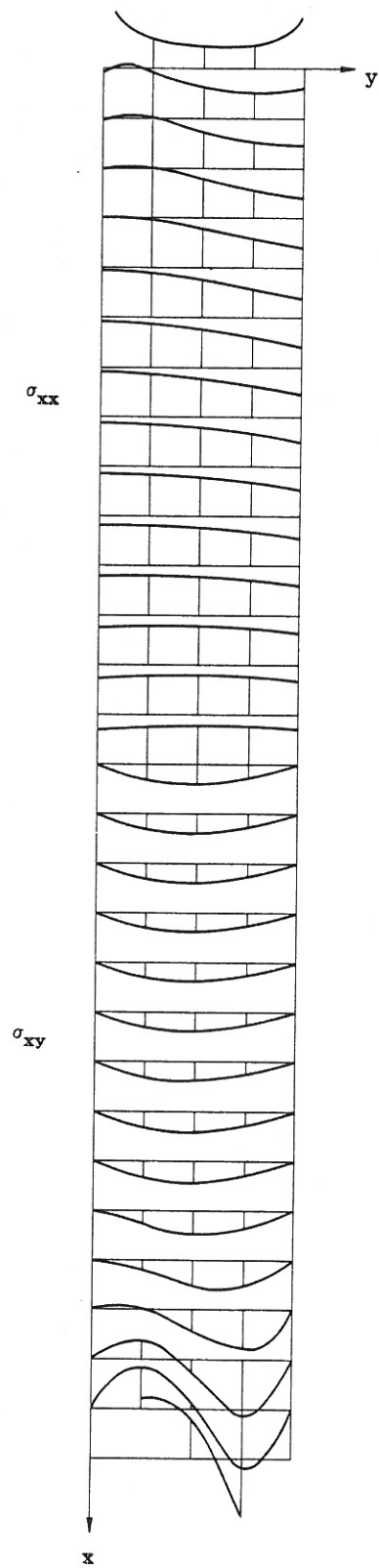
(3.38)

$$\partial u(0, 0)/\partial y = \partial u(\ell, 0)/\partial y = 0$$

er benyttet.



Figur 3.4



Figur 3.5

Mens den tilnærmede løsning gengiver legemets deformation til S-form, kan den, på grund af de tilnærmede randbetingelser, ikke bestemme de ret store spændingskoncentrationer, som findes.

Da deformationstilstanden ikke er nogen kontrollabel deformation, jf. appendix E, er den ikke særlig velegnet til bestemmelse af materialekonstanter. Som anført af Pagano & Halpin [68.02] og [68.04] kan man forvente resultater, som er lettere at tolke, ved at anvende indspændingsanordninger, som frit kan dreje sig og dermed bedre tilpasses en homogen tilstand.

#### 4. ARMEREDE MATERIALER

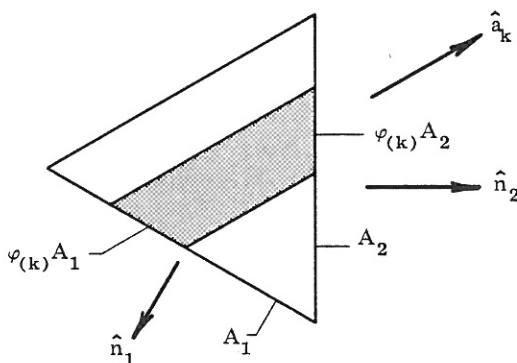
Ved et armeret materiale forstås et kompositmateriale bestående af en matrix (et grundmateriale) i hvilken der befinder sig en armering i form af fibre, stænger eller lignende. For et sådant materiale opstilles en teori i hvilken materialet beskrives som et anisotropt kontinuum, hvis mekaniske egenskaber bestemmes ud fra matrixmaterialets og armeringens mekaniske egenskaber. Teorien forudsætter fuldstændig samvirken mellem matrix og armering og de problemer, der opstår, når adhæsions- og friktionskræfter ikke fuldt kan overføres mellem matrix og armering, vil ikke blive behandlet.

Matrixmaterialet forudsættes at være homogent, men kan i øvrigt følge en vilkårlig konstitutiv ligning, brud- eller flydebetingelse.

Armeringen forudsættes at have en udtalt længderetning, dvs. dens tværmål er meget mindre end dens længdemål, og yderligere forudsættes armeringen at være kontinuerligt fordelt i matrixen. Heraf følger, at armeringens geometri kan beskrives ved retningsvektorfelter  $\hat{a}_{(k)}$  og armeringsforhold  $\varphi_{(k)}$ , hvor indeks  $k = 1, 2, \dots, N$  angiver  $N$  forskellige armeringsretninger. Armeringsforholdet  $\varphi_{(k)}$  for den  $k$ 'te armeringsretning defineres ved

$$A_{A(k)} = \varphi_{(k)} A \quad (4.1)$$

hvor  $A_{A(k)}$  er armeringsarealet og  $A$  det totale areal af et arealelement i en snitflade. Som det fremgår af figur 4.1 er det i denne forbindelse ligegyldigt, hvilken vinkel snitfladens normal  $\hat{n}$  danner med armeringens retningsvektor  $\hat{a}_{(k)}$ . Af dette fremgår i øvrigt, at  $\varphi_{(k)}$  er armeringens tværsnitsareal pr. arealenhed vinkelret på armeringsretningen. I et element med volumen  $V = Ah$  udgør armeringen en andel, som er  $V_{A(k)} = \varphi_{(k)} Ah = \varphi_{(k)} V$ , dvs. armeringsforholdet kan opfattes som et arealforhold eller et volumenforhold. Såvel  $\hat{a}_{(k)}$  som  $\varphi_{(k)}$  kan være funktioner af stedvektoren  $\vec{r}$ , og armeringsmaterialet kan følge en vilkårlig konstitutiv ligning, brud- eller flydebetingelse.



Figur 4.1

Forudsætningen om kontinuerlig fordeling af armering i matricen er ikke opfyldt for noget armeret materiale. Erfaringer med bl.a. jernbeton viser imidlertid, at teorier baseret på denne forudsætning er velegnede til at beskrive sådanne materials makroskopiske opførsel, når blot armeringen er nogenlunde jævnt fordelt.

Ovenstående forudsætninger fører til, at et armeret materiale kan beskrives som et inhomogent, anisotropt kontinuum. For at undgå beskrivelsen af inhomogene materialer forudsættes yderligere, at armeringsforholdet  $\varphi_{(k)}$  er konstant, altså ikke nogen funktion af stedvektoren  $\bar{r}$ . Herved opnås nemlig, at materialet bliver homogent og retliniet anisotropt, når  $\hat{a}_{(k)}$  er konstant, mens det bliver krumliniet anisotropt, når  $\hat{a}_{(k)}$  varierer med stedvektoren  $\bar{r}$  på en sådan måde, at  $\hat{a}_{(k)} \cdot \hat{a}_{(l)}$  er konstant.

#### 4.1 Tøjninger og spændinger i armerede materialer

Forudsætningen om at armeringen er kontinuerligt fordelt i matricen medfører, at flytningerne og dermed tøjningerne regnes for kontinuerte funktioner af stedvektoren  $\bar{r}$ . Teorien kan således ikke beskrive de, eventuelt store, variationer i tøjninger, som findes ved overgang fra matrix til armering.

Når kompositmaterialet deformeres optræder der, på grund af matrixens og armeringens forskellige mekaniske egenskaber, forskellige spændinger i henholdsvis matrix og armering. For at definere en spænding i kompositmaterialet betragtes et arealelement med arealet  $dA$  og normal  $\hat{n}$ , se figur 4.2. I første omgang betragtes et materiale med kun en armeringsretning  $\hat{a}_{(l)}$ . Idet kraften på armeringsarealet betegnes  $d\bar{P}_{A(n)}$  og kraften på matrixarealet med  $d\bar{P}_{M(n)}$ , hvor indeks A står for armering, M for matrix og n for normalen  $\hat{n}$ , har man, at den samlede kraft på kompositarealet  $d\bar{P}_{K(n)}$  er

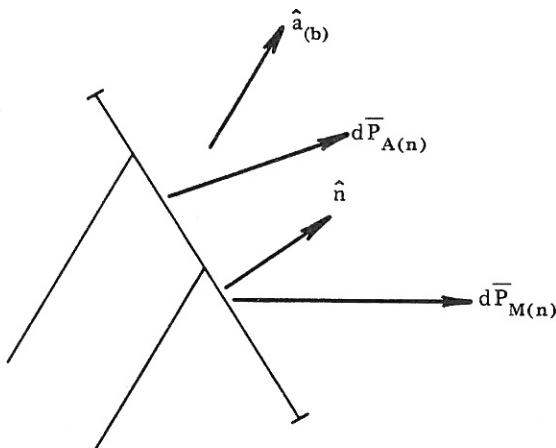
$$d\bar{P}_{K(n)} = d\bar{P}_{M(n)} + d\bar{P}_{A(n)} \quad (4.2)$$

Forudsættes kraften på et arealelement at være proportional med arealet, dvs.

$$d\bar{P}_{(n)} = \bar{p}_{(n)} dA \quad (4.3)$$

hvor  $\bar{p}_{(n)}$  er spændingsvektoren, får man

$$\bar{p}_{K(n)} dA = \bar{p}_{M(n)} (1 - \varphi_{(l)}) dA + \bar{p}_{A(n)} \varphi_{(l)} dA \quad (4.4)$$



Figur 4.2



eller

$$\bar{p}_{K(n)} = (1 - \varphi_{(\ell)}) \bar{p}_{M(n)} + \varphi_{(\ell)} \bar{p}_{A(n)} \quad (4.5)$$

Udtrykkes spændingsvektoren  $\bar{p}_{(n)}$  ved spændingstensen  $\sigma^{rs}$  som

$$\bar{p}_{(n)} = \bar{p}^r n_r = \sigma^{rs} \hat{i}_s n_r \quad (4.6)$$

kan (4.5) skrives

$$\sigma_K^{rs} = (1 - \varphi_{(\ell)}) \sigma_M^{rs} + \varphi_{(\ell)} \sigma_A^{rs} = \sigma_M^{rs} + \varphi_{(\ell)} (\sigma_A^{rs} - \sigma_M^{rs}) \quad (4.7)$$

Er der tale om flere armeringsretninger, finder man umiddelbart

$$\sigma_K^{rs} = (1 - \varphi) \sigma_M^{rs} + \sum_{\ell=1}^N \varphi_{(\ell)} \sigma_{A(\ell)}^{rs} = \sigma_M^{rs} + \sum_{\ell=1}^N \varphi_{(\ell)} (\sigma_{A(\ell)}^{rs} - \sigma_M^{rs}) \quad (4.8)$$

hvor

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^N \varphi_{(\ell)} \quad (4.9)$$

N er antallet af armeringsretninger, og

$\sigma_{A(\ell)}^{rs}$  er spændingstensen i den  $\ell$ 'te armeringsstang.

Udtrykket (4.8) er ikke særlig bekvemt at arbejde med. For at komme frem til et mere bekvemt udtryk må man gøre nogle tilnærmelser vedrørende spændingstensen  $\sigma_{A(\ell)}^{rs}$ . En simpel, men ikke for alle værdier af  $\varphi$  lige nøjagtig tilnærmelse skal angives. Da der er tale om armering med fibre, stænger eller lignende, forekommer det rimeligt at antage, at kraften i den enkelte armeringsstang hovedsagelig er en kraft i den pågældende armeringsretning, og at denne kraft er proportional med stangens tværsnitsareal.

Dette udtrykkes for den  $\ell$ 'te armeringsretning ved

$$d\bar{p}_{A(n)} = p_{A(\ell)} \varphi_{(\ell)} dA \hat{a}_{(\ell)} \cdot \hat{n}_{\hat{a}_{(\ell)}} \quad (4.10)$$

eller

$$\bar{p}_{A(n)} = p_{A(\ell)} \hat{a}_{(\ell)} \cdot \hat{n}_{\hat{a}_{(\ell)}} \quad (4.11)$$

hvor  $p_{A(\ell)}$  er normalspændingen i den  $\ell$ 'te armeringsstang i et snit vinkelret på dennes retning.

Skrives (4.11) på formen

$$\bar{p}_{A(n)} = p_{A(\ell)} a_{(\ell)}^r n_r a_{(\ell)}^s \hat{i}_s = \sigma_{A(\ell)}^{rs} n_r \hat{i}_s \quad (4.12)$$

ses, at

$$\sigma_{A(\ell)}^{rs} = p_{A(\ell)} a_{(\ell)}^r a_{(\ell)}^s \quad (4.13)$$

Af (4.8) skrevet på formen

$$\sigma_K^{rs} = \sigma_M^{rs} + \sum_{\ell=1}^N \varphi_{(\ell)} (\sigma_{A(\ell)}^{rs} - \sigma_M^{rs}) \quad (4.14)$$

ses, at kompositmaterialet er identisk med matrixmaterialet ikke blot for  $\varphi_{(\ell)} = 0$ , men også hvis man opfatter matrixen som armeret med et materiale med samme mekaniske egenskaber som matrixen, hvilket jo medfører  $\sigma_{A(\ell)}^{rs} = \sigma_M^{rs}$ . Da denne egenskab går tabt, hvis man blot indsætter (4.13) i (4.14), benyttes i stedet tilnærmelsen

$$\sigma_{A(\ell)}^{rs} = \sigma_M^{rs} + t_{(\ell)} a_{(\ell)}^r a_{(\ell)}^s \quad (4.15)$$

hvor  $t_{(\ell)}$  er en ekstra træk- eller trykspænding.

I stedet for blot et aksialt træk eller tryk regnes der altså med de samme spændinger som i den omgivende matrix plus et aksialt træk eller tryk i hver armeringsstang.

(4.15) indsat i (4.14) giver

$$\sigma_K^{rs} = \sigma_M^{rs} + \sum_{\ell=1}^N \varphi_{(\ell)} t_{(\ell)} a_{(\ell)}^r a_{(\ell)}^s \quad (4.16)$$

I det følgende udelades indeks K på spændingstensoren  $\sigma_K^{rs}$ . Herved bliver (4.16)

$$\sigma^{rs} = \sigma_M^{rs} + \sum_{\ell=1}^N (\varphi t a^r a^s)_{(\ell)} \quad (4.17)$$

Betydningen af de enkelte symboler i (4.17) gentages

- $\sigma^{rs}$  spændingstensor i kompositmaterialet
- $\sigma_M^{rs}$  spændingstensor i matrixmaterialet
- $\varphi$  armeringsforhold, se (4.1)
- $t$  ekstra normalspænding i armeringsstang
- $a^r$  koordinater og dermed retningscosinuser til vektor som angiver armeringsretning
- $\ell$  indeks for den  $\ell$ 'te armeringsretning

I det følgende vil det være forudsat, at der er tale om en egentlig armering, dvs. en armering som er stivere og stærkere end den omgivende matrix. En »armering«, som er mindre stiv og/eller stærk end matrixen kan behandles på helt samme måde.

## 4.2 Konstitutive ligninger

Er relationer mellem spændinger og tøjninger eller disses tidsafledede kendt for såvel matrixmateriale som armeringsmateriale, kan tilsvarende relationer for kompositmaterialet umiddelbart opstilles ved anvendelse af (4.17). I det følgende betragtes alene kompositmaterialer sammensat af isotrope delmaterialer.

### 4.2.1 Lineærelastisk matrix med lineærelastisk armering

For et lineærelastisk materiale gælder Hookes lov på formen

$$\sigma^{k\ell} = C_{mn}^{k\ell} \epsilon^{mn} \quad (4.18)$$

hvor  $\sigma^{k\ell}$  er Cauchys spændingstensor, og  $\epsilon^{mn}$  er den infinitesimale tøjningstensor.

Længdetøjningen  $\epsilon_{(a)}$  i en retning bestemt ved vektoren  $\hat{a}$  er givet ved

$$\epsilon_{(a)} = \epsilon^{mn} a_m a_n \quad (4.19)$$

Antages, at spændingen i armeringen i denne retning er proportional med denne tøjning, har man

$$t_{(q)} = (K a_m a_n)_{(q)} \epsilon^{mn} \quad (4.20)$$

Proportionalitetsfaktoren  $K_{(q)}$  kan med tilnærmelse sættes til

$$K_{(q)} = E_{A(q)} - E_M \quad (4.21)$$

hvor  $E_{A(q)}$  er armeringens elasticitetskoefficient for den pågældende armeringsretning, og hvor  $E_M$  er matrixmaterialets elasticitetskoefficient. Ekstra-normalspændingen i armeringen bliver således

$$t_{(q)} = (E_{A(q)} - E_M) a_m a_n \epsilon^{mn} \quad (4.22)$$

Indsættes i (4.17) har man

$$\sigma^{rs} = (M_{mn}^{rs} + \sum_{q=1}^N (K \varphi a_m a_n a^r a^s)_{(q)}) \epsilon^{mn} \quad (4.23)$$

hvor  $M_{mn}^{rs}$  er matrixmaterialets elasticitetstensor. Med

$$C_{mn}^{rs} = M_{mn}^{rs} + \sum_{q=1}^N (K \varphi a_m a_n a^r a^s)_{(q)} \quad (4.24)$$

har man for kompositmaterialet

$$\sigma^{rs} = C_{mn}^{rs} \epsilon^{mn} \quad (4.25)$$

hvor  $C_{mn}^{rs}$  er kompositmaterialets elasticitetstensor. Et sådant materiale kan derfor behandles som anført i kapitel 3.

Da matricen er forudsat isotrop, er kompositmaterialets anisotropi alene bestemt ved

$$A_{mn}^{rs} = \sum_{q=1}^N (K \varphi a_m a_n a^r a^s)_{(q)} \quad (4.26)$$

For  $A_{mn}^{rs}$  gælder

$$A_{mn}^{rs} = A_{mn}^{sr} = A_{nm}^{rs} = A_{rs}^{mn} \quad (4.27)$$

idet  $a^r = a_r$ .

Sættes  $a^k = a_k = (\lambda \ \mu \ \nu)$ , hvor  $a^q a_q = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ , kan  $A_{mn}^{rs}$  angives på matrixform som

$$[A_{mn}^{rs}] = \sum K \varphi \begin{bmatrix} \lambda^4 & \lambda^3 \mu & \lambda^3 \nu & x & \lambda^2 \mu^2 & \lambda^2 \mu \nu & x & x & \lambda^2 \nu^2 \\ x & \lambda^2 \mu^2 & \lambda^2 \mu \nu & x & \lambda \mu^3 & \lambda \mu^2 \nu & x & x & \lambda \mu \nu^2 \\ x & \lambda^2 \nu^2 & \lambda^2 \mu \nu & x & \lambda \mu^2 \nu & \lambda \mu \nu^2 & x & x & \lambda \nu^3 \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & \mu^4 & \mu^3 \nu & x & x & \mu^2 \nu^2 \\ x & x & x & x & x & \mu^2 \nu^2 & x & x & \mu \nu^3 \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x & \nu^4 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

hvor  $x$  bestemmes ved en af relationerne (4.27). Udover (4.27) ses det, at

$$\begin{aligned} A_{12}^{12} &= A_{22}^{11}, \quad A_{13}^{12} = A_{23}^{11}, \quad A_{13}^{13} = A_{33}^{11} \\ A_{22}^{13} &= A_{23}^{12}, \quad A_{23}^{13} = A_{33}^{12}, \quad A_{23}^{23} = A_{33}^{22} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dette er de i kapitel 1 omtalte Cauchy-relationer, som her gælder på grund af antagelsen om armeringens virkemåde.

Antages elasticitetskoefficienten  $E_{A(q)}$  at være den samme for alle armeringsretninger, har man

$$A_{mn}^{rs} = K \sum_{q=1}^N (\varphi a_m a_n a^r a^s)_{(q)} \quad (4.30)$$

Når yderligere armeringsforholdet er det samme for alle armeringsretninger, er

$$A_{mn}^{rs} = K \frac{\varphi}{N} \sum_{q=1}^N (a_m a_n a^r a^s)_{(q)} \quad (4.31)$$

Tensoren  $A_{mn}^{rs}$  og dermed kompositmaterialets elasticitetstensor  $C_{mn}^{rs} = M_{mn}^{rs} + A_{mn}^{rs}$  bliver isotrop for samme armering i de 9 retninger givet ved

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= (1 \ 0 \ 0), \quad \hat{a}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \ 1 \ 0), \quad \hat{a}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \ 0 \ -1) \\ \hat{a}_4 &= (0 \ 1 \ 0), \quad \hat{a}_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} (0 \ 1 \ 1), \quad \hat{a}_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 \ 1 \ 0) \\ \hat{a}_7 &= (0 \ 0 \ 1), \quad \hat{a}_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \ 0 \ 1), \quad \hat{a}_9 = \frac{\sqrt{2}}{2} (0 \ -1 \ 1) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Et eksempel på et isotropt kompositmateriale armeret i 7 retninger, men med 2 forskellige armeringsforhold er angivet af Højlund Rasmussen [79.02]. Samme sted er vist, at invertering af relationen (4.25) ikke er nogen simpel opgave, som derfor nok lettest foretages numerisk.

Er der specielt tale om armering i en plan og vinkelret på denne plan, skrives den konstitutive ligning (4.25)

$$\sigma^{rs} = C_{mn}^{rs} \epsilon^{mn} = C_{\alpha\beta}^{rs} \epsilon^{\alpha\beta} + 2C_{3\alpha}^{rs} \epsilon^{3\alpha} + C_{33}^{rs} \epsilon^{33} \quad (4.33)$$

idet  $x^1 x^2$ -planen vælges som den plan, hvori der kan være flere armeringsretninger. Udtrykket (4.33) spaltes yderligere i

$$\begin{aligned}
\sigma^{\kappa\lambda} &= C_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} \epsilon^{\alpha\beta} + 2C_{3\alpha}^{\kappa\lambda} \epsilon^{3\alpha} + C_{33}^{\kappa\lambda} \epsilon^{33} \\
\sigma^{3\lambda} &= C_{\alpha\beta}^{3\lambda} \epsilon^{\alpha\beta} + 2C_{3\alpha}^{3\lambda} \epsilon^{3\alpha} + C_{33}^{3\lambda} \epsilon^{33} \\
\sigma^{33} &= C_{\alpha\beta}^{33} \epsilon^{\alpha\beta} + 2C_{3\alpha}^{33} \epsilon^{3\alpha} + C_{33}^{33} \epsilon^{33}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

For et isotropt materiale er stivhedstensoren

$$M_{mn}^{rs} = \lambda \delta^{rs} \delta_{mn} + \mu (\delta_m^r \delta_n^s + \delta_n^r \delta_m^s) \tag{4.35}$$

som spaltes i

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} &= \lambda \delta^{\kappa\lambda} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\delta_\alpha^\kappa \delta_\beta^\lambda + \delta_\beta^\kappa \delta_\alpha^\lambda) \\
M_{3\alpha}^{\kappa\lambda} &= 0 \\
M_{33}^{\kappa\lambda} &= \lambda \delta^{\kappa\lambda} \\
M_{\alpha\beta}^{3\lambda} &= 0 \\
M_{3\alpha}^{3\lambda} &= \mu \delta_\alpha^\lambda \\
M_{33}^{3\lambda} &= 0 \\
M_{\alpha\beta}^{33} &= \lambda \delta_{\alpha\beta} \\
M_{3\alpha}^{33} &= 0 \\
M_{33}^{33} &= \lambda + 2\mu
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Med samme elasticitetskoefficient  $E_A$  for alle armeringsretninger,  $N$  armeringsretninger i  $x^1 x^2$ -planen og armeringsforholdet  $\Phi$  i  $x^3$ -retningen kan tensoren  $A_{mn}^{rs}$  skrives

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} &= K \sum_{q=1}^N (\varphi a_\alpha a_\beta a^\kappa a^\lambda)_{(q)} \\
A_{3\alpha}^{\kappa\lambda} &= A_{33}^{\kappa\lambda} = A_{\alpha\beta}^{3\lambda} = A_{3\alpha}^{3\lambda} = A_{33}^{3\lambda} = A_{\alpha\beta}^{33} = A_{3\alpha}^{33} = 0 \\
A_{33}^{33} &= K\Phi
\end{aligned} \tag{4.37}$$

og man får således

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} &= \lambda \delta^{\kappa\lambda} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\delta_\alpha^\kappa \delta_\beta^\lambda + \delta_\beta^\kappa \delta_\alpha^\lambda) + K \sum_{q=1}^N (\varphi a_\alpha a_\beta a^\kappa a^\lambda)_{(q)} \\
C_{3\alpha}^{\kappa\lambda} &= C_{\alpha\beta}^{3\lambda} = C_{33}^{3\lambda} = C_{3\alpha}^{33} = 0 \\
C_{33}^{\kappa\lambda} &= \lambda \delta^{\kappa\lambda} \\
C_{3\alpha}^{3\lambda} &= \mu \delta_\alpha^\lambda \\
C_{\alpha\beta}^{33} &= \lambda \delta_{\alpha\beta} \\
C_{33}^{33} &= \lambda + 2\mu + K\Phi
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Lamé-konstanterne  $\lambda$  og  $\mu$  er, udtrykt ved de tekniske konstanter

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{\nu E_M}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= G = \frac{E_M}{2(1+\nu)}\end{aligned}\quad (4.39)$$

hvor indeks M er udeladt på  $\nu$  og  $G$ .

I tilfælde af plan spændingstilstand benyttes de reducerede stivheder, se appendix F,

$$C_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} = C_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} - C_{33}^{\kappa\lambda} C_{\alpha\beta}^{33} / C_{33}^{33} \quad (4.40)$$

hvor

$$C_{33}^{\kappa\lambda} C_{\alpha\beta}^{33} = \lambda^2 \delta^{\kappa\lambda} \delta_{\alpha\beta} \quad (4.41)$$

Er specielt  $\Phi = 0$ , dvs. ingen armering i  $x^3$ -retningen, er

$$C_{33}^{\kappa\lambda} C_{\alpha\beta}^{33} / C_{33}^{33} = \frac{2\nu^2 G}{(1-\nu)(1-2\nu)} \delta^{\kappa\lambda} \delta_{\alpha\beta} \quad (4.42)$$

og dermed

$$\begin{aligned}C_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} &= G \left( \frac{2\nu}{1-\nu} \delta^{\kappa\lambda} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha}^{\kappa} \delta_{\beta}^{\lambda} + \delta_{\beta}^{\kappa} \delta_{\alpha}^{\lambda} \right) + A_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} \\ &= \frac{E_M}{1-\nu^2} \left( \nu \delta^{\kappa\lambda} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1-\nu}{2} (\delta_{\alpha}^{\kappa} \delta_{\beta}^{\lambda} + \delta_{\beta}^{\kappa} \delta_{\alpha}^{\lambda}) \right) + A_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda}\end{aligned}\quad (4.43)$$

og

$$C_{33}^{33} = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} G = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E_M \quad (4.44)$$

Armeringens bidrag til stivhedstensoren

$$A_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} = K \sum_{q=1}^N (\varphi a_{\alpha} a_{\beta} a^{\kappa} a^{\lambda})_{(q)} \quad (4.45)$$

betragtes herefter. Idet  $K = E_A - E_M$ , se (4.21), benyttes sammen med

$$\varphi_{(q)} = \mu_{(q)} \varphi \quad (4.46)$$

har man

$$\begin{aligned}A_{\alpha\beta}^{\kappa\lambda} &= (E_A - E_M) \varphi \sum_{q=1}^N (\mu a_{\alpha} a_{\beta} a^{\kappa} a^{\lambda})_{(q)} \\ &= E_A (1 - E_M / E_A) \varphi \sum_{q=1}^N (\mu a_{\alpha} a_{\beta} a^{\kappa} a^{\lambda})_{(q)} \\ &= E_A \eta \sum_{q=1}^N (\mu a_{\alpha} a_{\beta} a^{\kappa} a^{\lambda})_{(q)}\end{aligned}\quad (4.47)$$

hvor den herved definerede parameter

$$\eta = \frac{E_A - E_M}{E_A} \varphi \quad (4.48)$$

er beliggende i intervallet

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.49)$$

når, som nævnt i slutningen af afsnit 4.1,

$$E_M \leq E_A \quad (4.50)$$

Komponenterne for retningsvektoren  $\hat{a}_{(q)}$  er

$$a_{(q)}^\alpha = a_{(q)\alpha} = (\cos\theta_{(q)} \sin\theta_{(q)}) \quad (4.51)$$

hvor  $\theta_{(q)}$  er vinklen mellem  $x^1$ -aksen og  $\hat{a}_{(q)}$ . Med

$$s = \sin\theta_{(q)} \quad , \quad c = \cos\theta_{(q)} \quad (4.52)$$

kan spændings-tøjningsrelationerne på matrixform angives som

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{13} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{31} \\ \sigma^{32} \\ \sigma^{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{12} \\ \epsilon^{13} \\ \epsilon^{21} \\ \epsilon^{22} \\ \epsilon^{23} \\ \epsilon^{31} \\ \epsilon^{32} \\ \epsilon^{33} \end{bmatrix} + \\ &+ K \sum \begin{bmatrix} \varphi c^4 & \varphi s c^3 & 0 & \varphi s c^3 & \varphi s^2 c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi s c^3 & \varphi s^2 c^2 & 0 & \varphi s^2 c^2 & \varphi s^3 c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi s c^3 & \varphi s^2 c^2 & 0 & \varphi s^2 c^2 & \varphi s^3 c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi s^2 c^2 & \varphi s^3 c & 0 & \varphi s^3 c & \varphi s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{12} \\ \epsilon^{13} \\ \epsilon^{21} \\ \epsilon^{22} \\ \epsilon^{23} \\ \epsilon^{31} \\ \epsilon^{32} \\ \epsilon^{33} \end{bmatrix} \quad (4.53) \end{aligned}$$

Specielt har man, med  $\Phi = 0$



$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix} = \frac{E_M}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & (1-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & (1-\nu)/2 & (1-\nu)/2 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{12} \\ \epsilon^{21} \\ \epsilon^{22} \end{bmatrix} \\
+ E_A \eta \sum \mu \begin{bmatrix} c^4 & sc^3 & sc^3 & s^2 c^2 \\ sc^3 & s^2 c^2 & s^2 c^2 & s^3 c \\ sc^3 & s^2 c^2 & s^2 c^2 & s^3 c \\ s^2 c^2 & s^3 c & s^3 c & s^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{12} \\ \epsilon^{21} \\ \epsilon^{22} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

gældende for plan spændingstilstand.

Med samme armering i retninger med en indbyrdes vinkel  $2\pi/n$ , hvor  $n \geq 5$ , udviser materialet transvers isotropi. Undersøges materialet kun som en skive, vil det optræde som et isotropt materiale. Det skal bemærkes, at armering virker i to retninger, således at der til 1. armeringsretning svarer  $n = 2$ , osv. Det mindste antal armeringsretninger, som medfører transvers isotropi, er derfor 3.

Især skiver armeret i kun 1 retning er gjort til genstand for undersøgelser. En ofte anvendt fremgangsmåde til bestemmelse af elasticitetskonstanterne, se fx Jones [75.11], skal her skitseres, og resultaterne sammenlignes med de tidligere fundne.

Med armering i  $x^1$ -retningen kan tøjnings-spændingsrelationerne for plan spændingstilstand skrives, jf. (3.5)

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{22} \\ 2\epsilon^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{11} & 0 \\ -\nu_{12}/E_{22} & 1/E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

og

$$\epsilon^{33} = (-\nu_{13}/E_{33})\sigma^{11} - (\nu_{23}/E_{33})\sigma^{22} \quad (4.56)$$

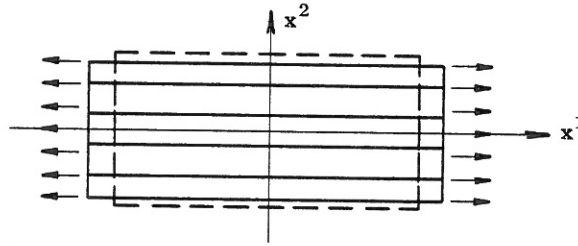
mens spændings- tøjningsrelationerne bliver

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{21}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{22} \\ 2\epsilon^{12} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

På grund af symmetri om hoveddiagonalen er

$$\nu_{12}E_{11} = \nu_{21}E_{22} \quad (4.58)$$

og der er derfor 4 uafhængige elasticitetskonstanter i matricerne i (4.55) og (4.57).



Figur 4.3

Med enakset træk i  $x^1$ -retningen, se figur 4.3, har man

$$\sigma^{11} = (1 - \varphi)\sigma_M^{11} + \varphi\sigma_A^{11} = (1 - \varphi)E_M\epsilon^{11} + \varphi E_A\epsilon^{11} = E_{11}\epsilon^{11} \quad (4.59)$$

hvoraf man får den simple blandingslov

$$E_{11} = (1 - \varphi)E_M + \varphi E_A \quad (4.60)$$

for elasticitetskoefficienten i armeringsretningen.

Ved enakset træk har man yderligere

$$\epsilon^{22} = (-\nu_{12}/E_{22})\sigma^{11} = (-\nu_{21}/E_{11})\sigma^{11} = -\nu_{21}\epsilon^{11} \quad (4.61)$$

som sammen med

$$\epsilon^{22} = -\nu_M(1 - \varphi)\epsilon^{11} - \nu_A\varphi\epsilon^{11} \quad (4.62)$$

giver samme blandingslov

$$\nu_{21} = (1 - \varphi)\nu_M + \varphi\nu_A \quad (4.63)$$

for Poissons forhold  $\nu_{21}$ .

Med enakset træk i  $x^2$ -retningen, se figur 4.4, har man, under forudsætning af at tøjningen  $\epsilon^{22}$  kan udtrykkes ved

$$\epsilon^{22} = (1 - \varphi)\epsilon_M^{22} + \varphi\epsilon_A^{22} \quad (4.64)$$

og, at spændingen  $\sigma^{22}$  er den samme i matrix og armering, dvs.

$$\epsilon_M^{22} = \sigma^{22}/E_M \quad \text{og} \quad \epsilon_A^{22} = \sigma^{22}/E_A \quad (4.65)$$

at

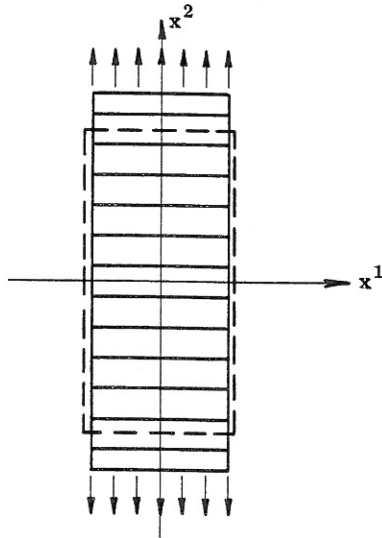
$$\epsilon^{22} = (1 - \varphi)\sigma^{22}/E_M + \varphi\sigma^{22}/E_A = \sigma^{22}/E_{22} \quad (4.66)$$

og dermed

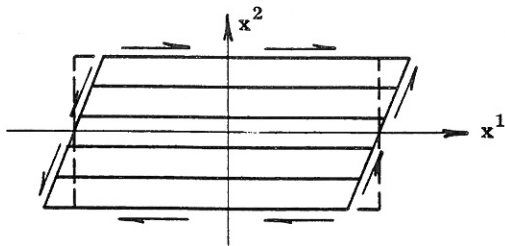
$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{1 - \varphi}{E_M} + \frac{\varphi}{E_A} \quad (4.67)$$

eller

$$E_{22} = \frac{E_M E_A}{\varphi E_M + (1 - \varphi) E_A} \quad (4.68)$$



Figur 4.4



Figur 4.5

Herefter kan Poissons forhold  $\nu_{12}$  beregnes ved hjælp af (4.58),

$$\nu_{12} = \nu_{21} E_{22}/E_{11} \quad (4.69)$$

Med forudsætningen om samme enaksede spænding  $\sigma^{22}$  i matrix og armering har man

$$\epsilon_M^{11} = -\nu_M \sigma^{22}/E_M \quad \text{og} \quad \epsilon_A^{11} = -\nu_A \sigma^{22}/E_A \quad (4.70)$$

som kun giver samme tværkontraktion for

$$\nu_M/E_M = \nu_A/E_A \quad (4.71)$$

Såfremt (4.71) ikke er opfyldt, vil der optræde spændinger  $\sigma^{11}$  og  $\sigma^{12}$  i såvel matrix som armering, hvorved (4.65) kun tilnærmelsesvis er gyldig.

Påføres et skiveelement spændingstilstanden ren forskydning, se figur 4.5, og antages, at tøjningen  $\epsilon^{12}$  kan udtrykkes ved

$$\epsilon^{12} = (1 - \varphi) \epsilon_M^{12} + \varphi \epsilon_A^{12} \quad (4.72)$$

samt, at spændingen  $\sigma^{12}$  er den samme i matrix og armering, dvs.

$$\epsilon_M^{12} = \sigma^{12}/2G_M \quad \text{og} \quad \epsilon_A^{12} = \sigma^{12}/2G_A \quad (4.73)$$

finder man

$$\epsilon^{12} = (1 - \varphi)\sigma^{12}/2G_M + \varphi\sigma^{12}/2G_A = \sigma^{12}/2G_{12} \quad (4.74)$$

og dermed

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1 - \varphi}{G_M} + \frac{\varphi}{G_A} \quad (4.75)$$

eller

$$G_{12} = \frac{G_M G_A}{\varphi G_M + (1 - \varphi)G_A} \quad (4.76)$$

For at kunne sammenligne resultater, skrives (4.54) på formen

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} = \frac{E_M}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{E_A - E_M}{E_M}(1 - \nu^2)\varphi & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{22} \\ 2\epsilon^{12} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

som, sammenholdt med (4.57)

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{21}E_{22}/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_{11}/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & E_{22}/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{11} \\ \epsilon^{22} \\ 2\epsilon^{12} \end{bmatrix}$$

giver

$$E_{11} = (1 - \varphi)E_M + \varphi E_A \quad (4.78)$$

$$\nu_{21} = \nu_M \quad (4.79)$$

$$E_{22} = \frac{((1 - \varphi)E_M + \varphi E_A)E_M}{(1 - (1 - \nu_M^2)\varphi)E_M + (1 - \nu_M^2)\varphi E_A} \quad (4.80)$$

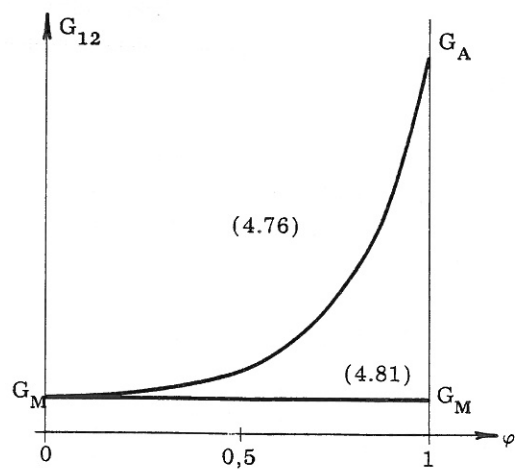
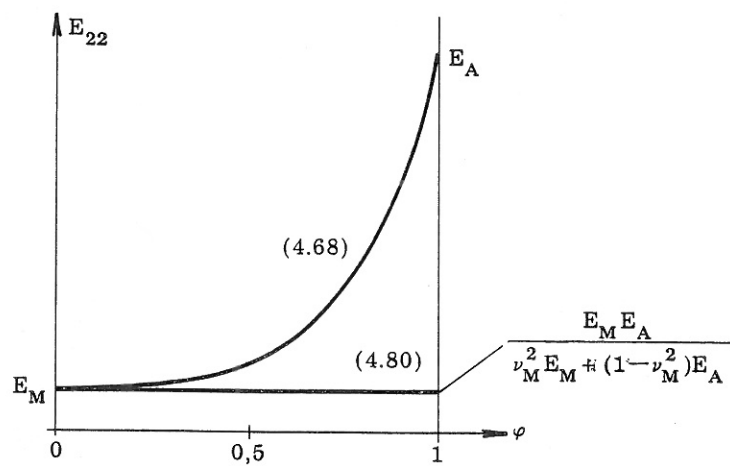
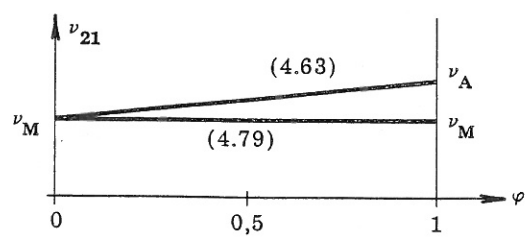
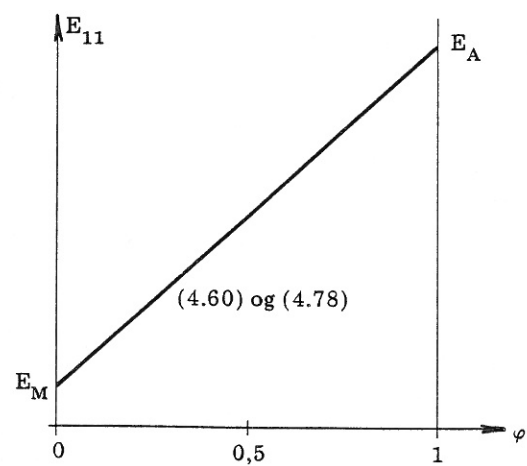
$$G_{12} = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)} = G_M \quad (4.81)$$

I figur 4.6 er vist, hvorledes  $E_{11}$  efter (4.60) og (4.78),  $\nu_{21}$  efter (4.63) og (4.79),  $E_{22}$  efter (4.68) og (4.80) samt  $G_{12}$  efter (4.76) og (4.81) varierer med armeringsforholdet  $\varphi$ .

Af figur 4.6 fremgår, at de to fremgangsmåder fører til samme resultater for  $\varphi = 0$ , og at forskellene mellem resultaterne er små for små værdier af  $\varphi$  ( $\varphi < \text{ca. } 0,3$ ). For store værdier af armeringsforholdet  $\varphi$  derimod, er forskellene mellem de beregnede værdier af  $E_{22}$  og  $G_{12}$  særdeles store, hvilket afspejler forskellene i de grundlæggende forudsætninger.

Forsøg tyder på, at (4.63), (4.68) og (4.76) i en del tilfælde afspejler virkeligheden bedre end (4.79), (4.80) og (4.81) for store værdier af  $\varphi$ , se fx [66.07].

Dette skyldes bl.a., at der ved udledningen af (4.79), (4.80) og (4.81) er forudsat, at kompositmaterialet har samme mekaniske egenskaber som matrixmaterialet ved påvirkning vinkelret på armeringsretningen uafhængigt af størrelsen af  $\varphi$ .



Figur 4.6

Undersøgelser af bl.a. Paul, Hashin, Shtrikman, Rosen og Hill [60.07], [62.04], [62.05], [63.13], [64.03], [64.05], [65.05] og [65.11] viser, at man ud fra kendskab til komponenternes elastiske egenskaber ikke på simpel måde kan bestemme kompositmaterialets elastiske egenskaber eksakt. Det er derimod under visse forudsætninger muligt at bestemme øvre og nedre grænser for de elastiske konstanter. Undersøgelserne er baseret på principperne om minimum af såvel potentiel som komplementær energi sammen med anvendelse af homogene spændings- og tøjningsfelter. Princippet om minimum af potentiel energi giver sammen med et homogent tøjningsfelt en øvre grænse (4.60) for elasticitetsmodulen (Voigt [10.01]), mens princippet om minimum af komplementær energi sammen med et homogent spændingsfelt giver en nedre grænse (4.68) (Reuss [29.01]). En kort gennemgang findes i fx Calcote [69.21] og Jones [75.11].

### 4.3 Brud- og flydebetingelser

Brud- og flydebetingelser, som i det følgende omtales under fællesbetegnelsen brudbetingelser, angives ofte, se fx [77.14], på formen

$$f(\underline{g}, \underline{a}, \underline{b} \dots) = 0 \quad (4.82)$$

hvor  $f$  en er skalær funktion af spændingstensoren  $\underline{g}$  og  $\underline{a}, \underline{b} \dots$ , som er tensorer, der indeholder materialets styrkeparametre. Da et materiales styrke kan afhænge af fx den belastningshistorie, som materialet har været udsat for, kan  $\underline{a}, \underline{b} \dots$  være funktioner af fx spændingstensoren opfattet som en funktion af tiden. I de simpleste tilfælde er komponenterne af  $\underline{a}, \underline{b} \dots$  konstanter. Som vist i kapitel 2 kan  $f$  udtrykkes som en funktion af nogle basisinvarianter for  $\underline{g}, \underline{a}, \underline{b} \dots$ , et sæt basisinvarianter, som afhænger af materialets symmetriegenskaber. Eksempler på brudbetingelser angivet på formen (4.82) er v. Mises' brudbetingelser for isotrope materialer [13.01], for visse krystaller [28.04] og Hills brudbetingelse for ortotrope materialer [48.08].

For nogle materialer kan brudbetingelsen ikke angives som kun én funktion af formen (4.81), og man må benytte flere funktioner

$$f_{\alpha}(\underline{g}, \underline{a}, \underline{b} \dots) = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (4.83)$$

Som eksempel kan nævnes Coulombs friktionshypotese fra 1773 [1776.01], evt. kombineret med en betingelse for adskillelsesbrud.

Brudbetingelser formuleres som regel således at

$$f_{\alpha} < 0 \text{ for alle } \alpha \quad (4.84)$$

svarer til tilladelige spændinger, som ikke medfører brud,

$$f_{\alpha} = 0 \text{ for én eller flere værdier af } \alpha \quad (4.85)$$

$$f_{\alpha} < 0 \text{ for øvrige værdier af } \alpha$$

svarer til brud, og

$$f_{\alpha} > 0 \text{ for } \text{én eller flere værdier af } \alpha \quad (4.86)$$

svarer til spændinger, som ikke kan optages af materialet.

Brudbetingelser for isotrope materialer afbildes ofte som flader i et  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinatsystem, et såkaldt Haigh-Westergaard spændingsrum efter Haigh [20.05] og Westergaard [20.06]. Det er dog kun, når tensorerne  $\underline{a}, \underline{b} \dots$  i (4.83) har konstante komponenter, at der er tale om blot én flade. I andre tilfælde er der en flade svarende til begyndende brud og andre flader, hvis beliggenhed afhænger af belastningshistorien. Når en isotrop brudbetingelse udtrykkes som skalære funktioner af spændingstensoren og nogle konstanter, er disse funktioner som vist i kapitel 2 funktioner af spændingstensorens hovedinvarianter I, II og III. Det må derfor antages, at det kan være hensigtsmæssigt at afbilde sådanne brudbetingelser i et I, II, III-koordinatsystem, et forhold som også Thoft-Christensen [63.01] har omtalt. For anisotrope materialer udtrykkes brudbetingelserne som skalære funktioner af flere invarianter end 3, og det er generelt ikke muligt at give en anskuelig afbildning af disse brudbetingelser i et invariantrum. Da hovedspændingsretninger og et materiales eventuelle symmetriakser kan være drejet vilkårligt i forhold til hinanden, er dette heller ikke muligt i et  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -koordinatsystem.

Er brudbetingelsen for et matrixmateriale kendt på formen (4.83), kan brudbetingelsen for et kompositmateriale opstilles ved anvendelse af (4.17)

$$\sigma^{rs} = \sigma_M^{rs} + \sum_{q=1}^N (\varphi t a^r a^s)_{(q)} \quad (4.87)$$

Det antages, at den ekstra normalspænding i det  $q$ 'te armeringsstang  $t_{(q)}$  frit kan antage værdier i et interval

$$-t_{c(q)} \leq t_{(q)} \leq t_{t(q)} \quad (4.88)$$

således, at kompositmaterialets styrke bliver den størst muligt. Dette betyder, at gyldigheden af nedreværdisætningen forudsættes. Armeringens forskydningsstyrke og styrkerne vinkelret på armeringsretningen regnes lig med matrixmaterialets.

#### 4.3.1 Armeret v. Mises-materiale

Brudbetingelsen for et homogent, isotropt v. Mises-materiale er

$$f = 2I_{\sigma}^2 - 6II_{\sigma} - 2\sigma_c^2 = 3\sigma_k^k \sigma_k^k - \sigma_k^k \sigma_k^k - 2\sigma_c^2 = 0 \quad (4.89)$$

hvor  $\sigma_c$  er materialets styrke ved enakset påvirkning, træk såvel som tryk. Indsættes fra (4.87)

$$\delta_{m\ell} \sigma_M^{km} = \sigma_k^k - \sum (\varphi t a^k a_{\ell})_{(q)} \quad (4.90)$$

bliver brudbetingelsen for et armeret v. Mises-materiale

$$\begin{aligned} f = & 3\sigma_k^k \sigma_k^k - \sigma_k^k \sigma_k^k - 2\sigma_c^2 - 2(3\sigma_k^k \sum (\varphi t a^k a_k) - \sigma_k^k \sum (\varphi t)) \\ & + 3 \sum (\varphi t a^k a_k) \cdot \sum (\varphi t a^k a_k) - (\sum (\varphi t))^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

idet  $a^k a_k = 1$  er benyttet. Da armeringsspændingerne repræsenteret ved  $t_{(q)}$  kan antage forskellige værdier, indeholder (4.91) ikke blot én brudfunktion, men en familie af brudfunktioner.

Betragter man specielt plane spændingstilstande  $\sigma_k^3 = 0$  med armering alene i samme plan, har man

$$f = 3\sigma_\beta^\alpha \sigma_\alpha^\beta - \sigma_\alpha^\alpha \sigma_\beta^\beta - 2\sigma_c^2 - 2(3\sigma_\beta^\alpha \sum (\varphi t a_\alpha^\beta) - \sigma_\alpha^\alpha \sum (\varphi t)) + 3 \sum (\varphi t a_\beta^\alpha) \cdot \sum (\varphi t a_\alpha^\beta) - (\sum (\varphi t))^2 = 0 \quad (4.92)$$

og med armering i kun én retning

$$a_\alpha = a^\alpha = (1 \quad 0) \quad (4.93)$$

bliver brudbetingelsen

$$f = 3\sigma_\beta^\alpha \sigma_\alpha^\beta - \sigma_\alpha^\alpha \sigma_\beta^\beta - 2\sigma_c^2 - 2(2\sigma_1^1 - \sigma_2^2) \varphi t + 2(\varphi t)^2 = 0 \quad (4.94)$$

som også kan skrives

$$f = 2(\sigma_{xx} - \varphi t)^2 - 2(\sigma_{xx} - \varphi t)\sigma_{yy} + 2\sigma_{yy}^2 + 6\sigma_{xy}^2 - 2\sigma_c^2 = 0 \quad (4.95)$$

Da brudbetingelsen (4.89) for matrixmaterialet i en plan spændingstilstand kan skrives

$$f = 2\sigma_{xx}^2 - 2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2\sigma_{yy}^2 + 6\sigma_{xy}^2 - 2\sigma_c^2 = 0 \quad (4.96)$$

ses det, at (4.95) fremkommer ved i (4.96) at erstatte  $\sigma_{xx}^M$  med  $\sigma_{xx}^K - \varphi t$ .

Herefter skal  $t$  bestemmes, så kompositmaterialets styrke bliver så stor som mulig, hvilket er tilfældet, når i (4.95)

$$\partial f / \partial t = -4(\sigma_{xx} - \varphi t) + 2\sigma_{yy} = 0 \quad (4.97)$$

og dermed

$$\varphi t = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} / 2 \quad (4.98)$$

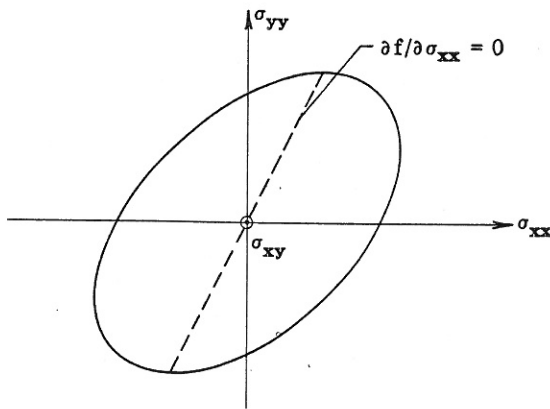
idet dog (4.88) skal overholdes. Betegnes armeringens trækstyrke med  $\sigma_{At}$  og dens trykstyrke med  $\sigma_{Ac}$ , kan (4.88) skrives

$$\sigma_c - \sigma_{Ac} \leq t \leq \sigma_{At} - \sigma_c \quad (4.99)$$

og man får de tre brudfunktioner

$$\begin{aligned} f_1 &= 2(\sigma_{xx} - \varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac}))\sigma_{yy} + 2\sigma_{yy}^2 \\ &\quad + 6\sigma_{xy}^2 - 2\sigma_c^2 = 0 \quad \text{for } t = \sigma_c - \sigma_{Ac} \\ f_2 &= 3\sigma_{yy}^2/2 + 6\sigma_{xy}^2 - 2\sigma_c^2 = 0 \quad \text{for } \varphi t = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}/2 \\ f_3 &= 2(\sigma_{xx} - \varphi(\sigma_{At} - \sigma_c))^2 - 2(\sigma_{xx} - \varphi(\sigma_{At} - \sigma_c))\sigma_{yy} + 2\sigma_{yy}^2 \\ &\quad + 6\sigma_{xy}^2 - 2\sigma_c^2 = 0 \quad \text{for } t = \sigma_{At} - \sigma_c \end{aligned} \quad (4.100)$$



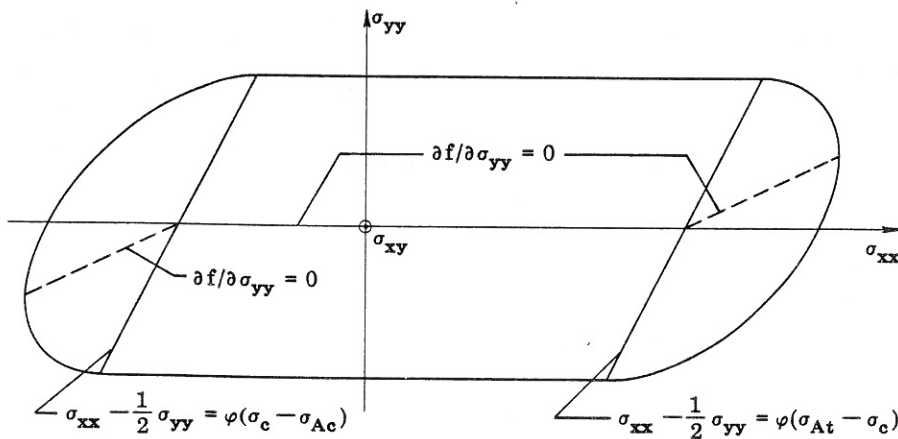


Figur 4.7

Det bemærkes, at de tre funktioner ikke skal opfattes som (4.83), hvor den funktion, der giver mindst bæreevne, skal benyttes. Af de tre funktioner gælder

$$\begin{aligned}
 f_1 & \text{ når } \sigma_{xx} - \sigma_{yy}/2 \leq \varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac}) \\
 f_2 & \text{ når } \varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac}) \leq \sigma_{xx} - \sigma_{yy}/2 \leq \varphi(\sigma_{At} - \sigma_c) \\
 f_3 & \text{ når } \varphi(\sigma_{At} - \sigma_c) \leq \sigma_{xx} - \sigma_{yy}/2
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Brudbetingelsen (4.96) for matrixmaterialet kan i et  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ -koordinat-system afbildes som en ellipsoide, se figur 4.7. Tilsvarende kan brudbetingelsen (4.100) for kompositmaterialet afbildes som to halve ellipsoider forbundet med en cylinderflade, se figur 4.8. Man ser, at brudbetingelsen vist i figur 4.8 kan konstrueres ud fra den, der er vist i figur 4.7, på følgende måde. Kur-



Figur 4.8

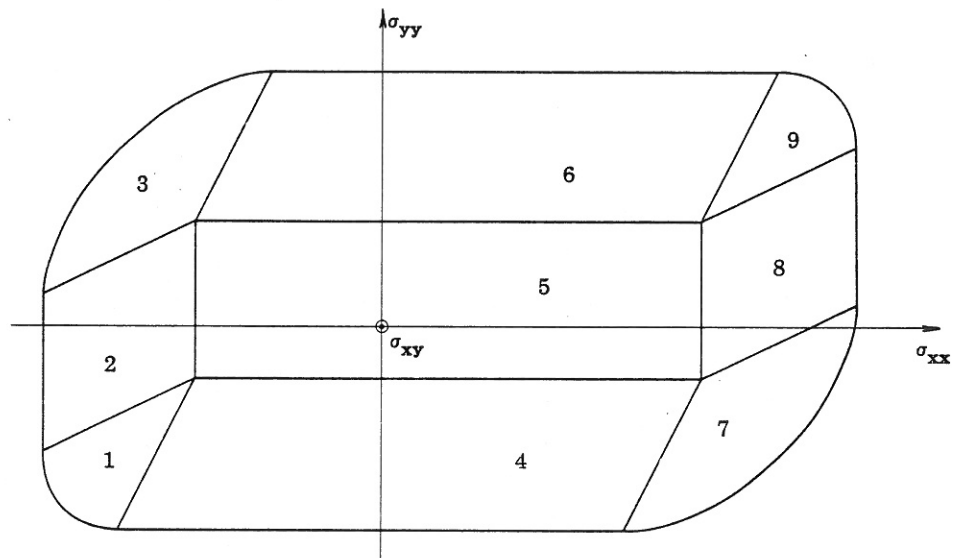
ven langs hvilken  $\partial f / \partial \sigma_{xx} = 0$  bestemmes, hvorved ellipsoiden deles i to dele. Den ene del forskydes stykket  $\varphi(\sigma_{At} - \sigma_c)$  i  $\sigma_{xx}$ -aksens positive retning og den anden del stykket  $\varphi(\sigma_{Ac} - \sigma_c)$  i  $\sigma_{xx}$ -aksens negative retning. Endelig forbindes de to ellipsoidedele med en cylinderflade med  $\partial f / \partial \sigma_{xx} = 0$  som ledet kurve og  $\sigma_{xx}$ -aksen som frembringerretning.

Herefter skal armering i to ortogonale retninger betragtes. Med x- og y-retningerne som armeringsretninger kan brudbetingelsen (4.92) skrives

$$f = 2(\sigma_{xx} - \varphi_x t_x)^2 + 2(\sigma_{yy} - \varphi_y t_y)^2 - 2(\sigma_{xx} - \varphi_x t_x)(\sigma_{yy} - \varphi_y t_y) + 6\sigma_{xy}^2 - 2\sigma_c^2 = 0 \quad (4.102)$$

I figur 4.9 er brudbetingelsen (4.102) afbildet i et  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ -koordinat-system. Brudbetingelsen er konstrueret ud fra figur 4.8, idet kurverne  $\partial f / \partial \sigma_{yy} = 0$  er bestemt, og de herved fremkomne fladedele er parallelforskudt i  $\sigma_{yy}$ -aksens retning. Brudbetingelsen (4.102) spaltes i 9 brudfunktioner  $f_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 9$ . Med den i figur 4.9 anførte nummerering finder man udtryk for  $f_\alpha$  ved i (4.102) at indsætte værdier for  $\varphi_x t_x$  og  $\varphi_y t_y$ , som tages fra tabel 4.1. Værdierne er bestemt ved i (4.102) at sætte  $\partial f / \partial t_x = 0$  og  $\partial f / \partial t_y = 0$  sammen med

$$\begin{aligned} \sigma_c - \sigma_{Axc} &\leq t_x \leq \sigma_{Axt} - \sigma_c \\ \sigma_c - \sigma_{Ayc} &\leq t_y \leq \sigma_{Ayt} - \sigma_c \end{aligned} \quad (4.103)$$



Figur 4.9

Område $\alpha$	$\varphi_x t_x$	$\varphi_y t_y$
1	$\varphi_x(\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\varphi_y(\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
2	$\varphi_x(\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\sigma_{yy} - (\sigma_{xx} - \varphi_x(\sigma_c - \sigma_{Axc}))/2$
3	$\varphi_x(\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\varphi_y(\sigma_{Ayt} - \sigma_c)$
4	$\sigma_{xx} - (\sigma_{yy} - \varphi_y(\sigma_c - \sigma_{Ayc}))/2$	$\varphi_y(\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
5	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$
6	$\sigma_{xx} - (\sigma_{yy} - \varphi_y(\sigma_{Ayt} - \sigma_c))/2$	$\varphi_y(\sigma_{Ayt} - \sigma_c)$
7	$\varphi_x(\sigma_{Axt} - \sigma_c)$	$\varphi_y(\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
8	$\varphi_x(\sigma_{Axt} - \sigma_c)$	$\sigma_{yy} - (\sigma_{xx} - \varphi_x(\sigma_{Axt} - \sigma_c))/2$
9	$\varphi_x(\sigma_{Axt} - \sigma_c)$	$\varphi_y(\sigma_{Ayt} - \sigma_c)$

Tabel 4.1

#### 4.3.2 Armeret Coulomb-materiale

For et homogent, isotropt Coulomb-materiale kan betingelsen for glidningsbrud angives som

$$\begin{aligned}
 f_1 &= k\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_c = 0 \\
 f_2 &= k\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_c = 0 \\
 f_3 &= k\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_c = 0 \\
 f_4 &= k\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_c = 0 \\
 f_5 &= k\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_c = 0 \\
 f_6 &= k\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_c = 0
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

hvor  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  og  $\sigma_3$  er hovedspændingerne,  $\sigma_c$  er materialets trykstyrke, og  $k$  er en konstant, som afhænger af materialets friktionskoefficient. Hvis trækstyrken  $\sigma_t$  er

$$\sigma_t < \sigma_c/k \tag{4.105}$$

må (4.104) suppleres med en betingelse for adskillelsesbrud, der kan angives som

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \sigma_1 - \sigma_t = 0 \\
 g_2 &= \sigma_2 - \sigma_t = 0 \\
 g_3 &= \sigma_3 - \sigma_t = 0
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

hvor  $\sigma_t$  er adskillelsesmodstanden. Udtrykkene (4.104) og (4.106) er af typen (4.83).

Da hovedspændingerne ikke på simpel måde lader sig udtrykke ved spændingstensorens komponenter i et vilkårligt akse-system, må brudbetingelserne udtrykkes ved spændingstensorens hovedinvarianter I, II og III, hvorefter man kan benytte (4.87). Dette kan gøres ved at indføre brudfunktionerne  $f$  og  $g$  ved

$$\begin{aligned} -f &= f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6 = 0 \\ g &= g_1 g_2 g_3 \end{aligned} \quad (4.107)$$

hvor minustegnet medfører  $f < 0$  for spændingstilstande, som ikke medfører brud. For adskillelsesbruddet finder man

$$\begin{aligned} g &= (\sigma_1 - \sigma_t)(\sigma_2 - \sigma_t)(\sigma_3 - \sigma_t) \\ &= III - \sigma_t II + \sigma_t^2 I - \sigma_t^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.108)$$

mens man for glidningsbruddet kan skrive

$$-f = A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \dots + A_6 k^6 = 0 \quad (4.109)$$

hvor  $A_\alpha$  er bestemt ved:

$$\begin{aligned} A_0 &= (III + \sigma_c II + \sigma_c^2 I + \sigma_c^3)^2 \\ -A_1 &= I II III - 3III^2 + \sigma_c(I II^2 + 2I^2 III - 5II III) \\ &\quad + \sigma_c^2(3I^2 II - I III - 2II^2) + \sigma_c^3(2I^3 + I II - 3III) \\ &\quad + 2\sigma_c^4(2I^2 - II) + 2\sigma_c^5 I \\ A_2 &= I^3 III - 5I II III + II^3 + 6III^2 + \sigma_c(I^3 II - 3I^2 III + 2II III) \\ &\quad + \sigma_c^2(I^4 + 3II^2 - 6I III) + \sigma_c^3(2I^3 + I II - 3III) \\ &\quad + \sigma_c^4(I^2 + 2II) \\ -A_3 &= I^2 II^2 - 2I^3 III - 2II^3 + 6I II III - 7III^2 + \sigma_c(I^3 II - 3I^2 III + 2II III) \\ &\quad + \sigma_c^2(3I^2 II - I III - 2II^2) + 2\sigma_c^3(I II + III) \\ A_4 &= I^3 III + II^3 - 5I II III + 6III^2 + \sigma_c(I II^2 + 2I^2 III - 5II III) \\ &\quad + \sigma_c^2(2I III + II^2) \\ -A_5 &= III(I II - 3III + 2\sigma_c II) \\ A_6 &= III^2 \end{aligned}$$

Ved udregningen af  $A_\alpha$  er benyttet nogle relationer mellem hovedinvarianter og hovedspændinger, som er anført i appendix I.

Selv i det tilfælde, hvor der er tale om et Tresca-materiale, dvs.  $k = 1$  og  $\sigma_t = \sigma_c$ , bliver udtrykket temmelig uhåndterligt. Man finder, som også anført af bl.a. Mendelson [68.13]

$$-f = 4J_2^3 + 27J_3^2 + 9J_2^2\sigma_c^2 + 6J_2\sigma_c^4 + \sigma_c^6 = 0 \quad (4.110)$$

hvor  $J_\gamma$  er deviationsspændingstensorens hovedinvarianter. Med deviations-spændingerne

$$s_\lambda^k = \sigma_\lambda^k - \delta_\lambda^k \sigma_m^m / 3 \quad (4.111)$$

er

$$\begin{aligned} J_1 &= I_s = 0 \\ J_2 &= II_s = II - I^2/3 \\ J_3 &= III_s = III - I II/3 + 2I^3/27 \end{aligned} \quad (4.112)$$

Da v. Mises' brudbetingelse kan skrives

$$-f = 6J_2 + 2\sigma_c^2 = 0 \quad (4.113)$$

er denne betingelse væsentligt nemmere at benytte.

I tilfældet plan spændingstilstand er  $III = 0$ , og  $0 \leq I^2 - 4II$  når hovedspændingerne er reelle. Betingelsen (4.109) reduceres til

$$\begin{aligned} -f &= \{II + \sigma_c(I + \sigma_c)\} \{(k+1)^2II - (Ik - \sigma_c)(I + \sigma_c)\} \cdot \\ &\quad \{k^2II - \sigma_c(Ik - \sigma_c)\} \end{aligned} \quad (4.114)$$

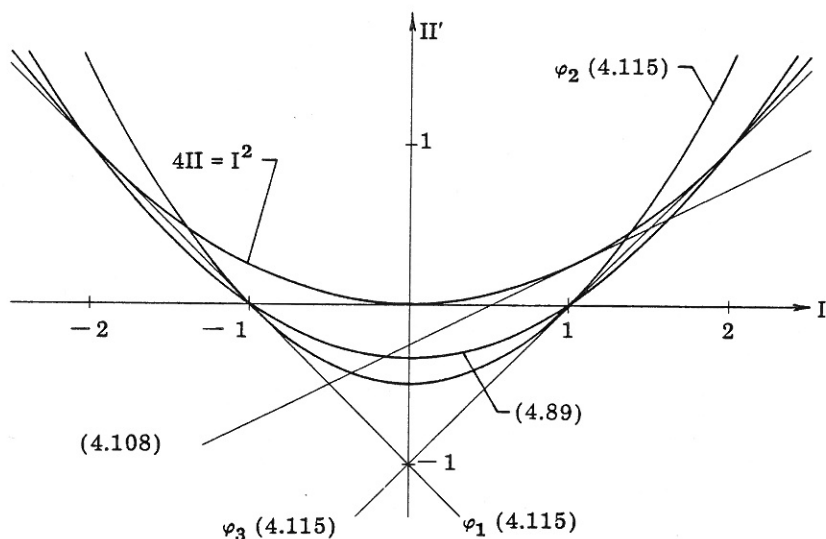
dvs. brudbetingelsen spaltes i de 3 funktioner

$$\begin{aligned} -\varphi_1 &= II + \sigma_c(I + \sigma_c) = 0 \\ -\varphi_2 &= (k+1)^2II - (Ik - \sigma_c)(I + \sigma_c) = 0 \\ -\varphi_3 &= k^2II - \sigma_c(Ik - \sigma_c) = 0 \end{aligned} \quad (4.115)$$

I figur 4.10 er brudbetingelsen (4.115) vist for et Tresca-materiale i et  $I', II'$ -koordinatsystem, hvor  $I' = I/\sigma_c$  og  $II' = II/\sigma_c^2$ . Til sammenligning er også v. Mises' brudbetingelse (4.89) vist. Det lukkede område, der svarer til spændinger, som ikke medfører brud, er det, der ligger mellem kurven  $4II = I^2$  og kurven  $\varphi_2$  (4.115) eller (4.89).

Det fremgår nemlig, at betingelserne  $\varphi_1 = 0$  og  $\varphi_3 = 0$  for denne specielle værdi af  $k$  ikke spiller nogen rolle. Af (4.108) og (4.115) ses, at for  $k = 1$  og  $\sigma_t < \sigma_c$  erstattes  $\varphi_3 = 0$  af  $g = II - (\sigma_t/\sigma_c)(I - \sigma_t/\sigma_c) = 0$ . Denne betingelse er i figur 4.10 vist for  $\sigma_t/\sigma_c = 1/2$ .

Man kan ud fra disse undersøgelser vedrørende isotrope Coulomb-materialer slutte, at brudbetingelser for armerede Coulomb-materialer generelt bliver særdeles komplicerede. Kun plane spændingstilstande med armering alene i samme plan vil derfor blive behandlet i det følgende. Fra (4.108) og (4.115) har man da



Figur 4.10.

$$\begin{aligned}
 -\varphi_1 &= \Pi + \sigma_c(I + \sigma_c) = 0 \\
 -\varphi_2 &= (k+1)^2 \Pi - (Ik - \sigma_c)(I + \sigma_c) = 0 \\
 -g &= \Pi - \sigma_t(I - \sigma_t) = 0
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

forudsat  $\sigma_t < \sigma_c/k$ . Hvis dette ikke er tilfældet, skal man i (4.116) og de følgende udtryk blot erstatte  $\sigma_t$  med  $\sigma_c/k$ .

Med

$$\begin{aligned}
 I &= \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\
 \Pi &= \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_{xx} \sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

kan (4.116) skrives

$$\begin{aligned}
 -\varphi_1 &= (\sigma_c + \sigma_{xx})(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -\varphi_2 &= (\sigma_c - k\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(\sigma_c - k\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) - (k+1)^2 \sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -g &= (\sigma_t - \sigma_{xx})(\sigma_t - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

et resultat, som også fås ved at indsætte

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2})$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (4.119)$$

i (4.104) og (4.106).

I et  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ -koordinatsystem afbildes (4.118) som 3 kegleflader med samme akse,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = 0$ , se figur 4.11.

Med armering i x-aksens retning skal, i henhold til (4.87),  $\sigma_{xx}$  erstattes med  $\sigma_{xx} - \varphi t$  i (4.118). Af

$$\partial \varphi_1 / \partial t = 0, \quad \partial \varphi_2 / \partial t = 0 \quad \text{og} \quad \partial g / \partial t = 0 \quad (4.120)$$

finder man, at man skal sætte

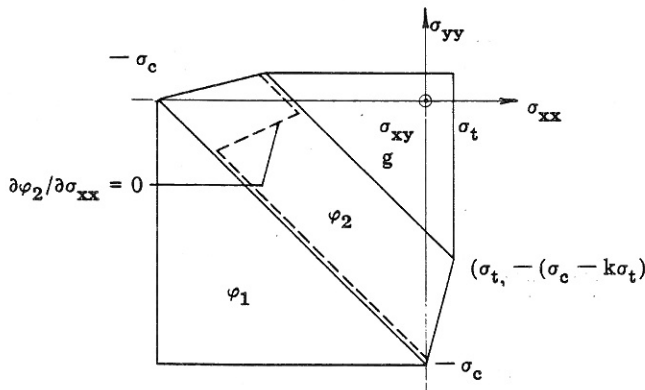
$$\varphi t = \sigma_{xx} - ((k^2 + 1)\sigma_{yy} - (k - 1)\sigma_c) / 2k \quad (4.121)$$

i et område svarende til  $\varphi_2 = 0$ , mens egentligt ekstremum ikke findes for de to andre områder. Man skal derfor benytte  $t = \sigma_c - \sigma_{Ac}$  og  $t = \sigma_{At} - \sigma_c$  i disse områder. Dette svarer til, at den del af brudbetingelsen, der ligger til højre for den punkterede linie i figur 4.11, parallelforskydes stykket  $\varphi(\sigma_{At} - \sigma_c)$  i  $\sigma_{xx}$ -aksens positive retning, og delen til venstre stykket  $\varphi(\sigma_{Ac} - \sigma_c)$  i  $\sigma_{xx}$ -aksens negative retning. Herved fremkommer de i figur 4.12 viste 7 områder.

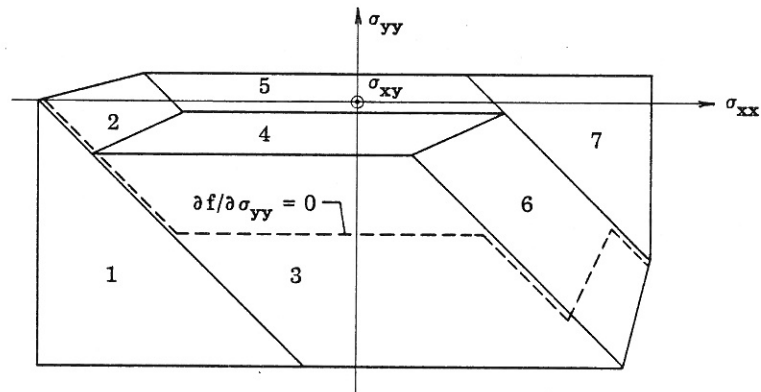
Med den i figur 4.12 anførte nummerering af områderne fremkommer brudfunktionerne ved, at man i brudfunktionerne

$$\begin{aligned} -\varphi_{1\alpha} &= (\sigma_c + \sigma_{xx} - \varphi t)(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\ -\varphi_{2\alpha} &= (\sigma_c - k(\sigma_{xx} - \varphi t) + \sigma_{yy})(\sigma_c - k\sigma_{yy} + \sigma_{xx} - \varphi t) \\ &\quad - (k + 1)^2 \sigma_{xy}^2 = 0 \\ -g_\alpha &= (\sigma_t - (\sigma_{xx} - \varphi t))(\sigma_t - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.122)$$

indsætter  $\varphi t$  efter tabel 4.2.



Figur 4.11



Figur 4.12

Område $\alpha$	Brud-funktion	$\varphi_t$
1	$\varphi_{11}$	$\varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac})$
2	$\varphi_{22}$	$\varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac})$
3	$\varphi_{13}$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c$
4	$\varphi_{24}$	$\sigma_{xx} - ((k^2 + 1)\sigma_{yy} - (k - 1)\sigma_c)/2k$
5	$g_5$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - (k + 1)\sigma_t$
6	$\varphi_{26}$	$\varphi(\sigma_{At} - \sigma_t)$
7	$g_7$	$\varphi(\sigma_{At} - \sigma_t)$

Tabel 4.2

I område 3 er brudbetingelsen en cylinderflade med  $\sigma_{xx}$ -aksen som frembringerretning og skæringskurven mellem  $\varphi_1$  og  $\varphi_2$  som ledekurve, dvs.

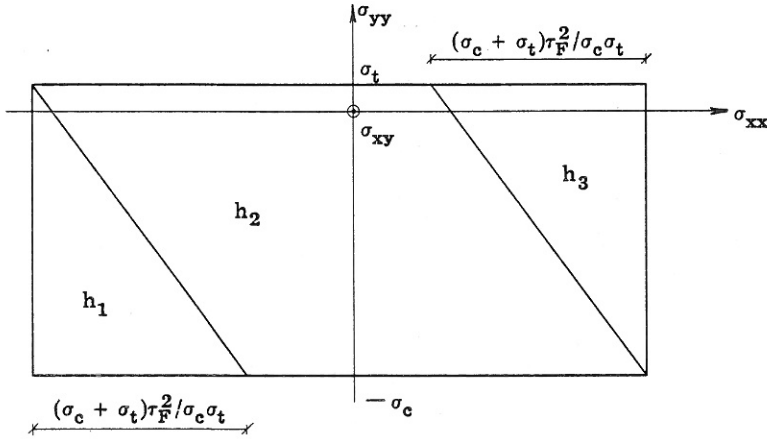
$$-\sigma_{yy}(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \quad (4.123)$$

Tilsvarende er brudbetingelsen i område 5 en cylinderflade med  $\sigma_{xx}$ -aksen som frembringerretning og skæringskurven mellem  $\varphi_2$  og  $g$  som ledekurve, dvs.

$$(\sigma_c - k\sigma_t + \sigma_{yy})(\sigma_t - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \quad (4.124)$$

Det ses, at selv med armering i kun 1 retning bliver brudbetingelsen temmelig kompliceret. I [79.08] er derfor foreslået som en tilnærmelse at erstatte brudbetingelsen (4.122) og tabel 4.2 med brudfunktionerne





Figur 4.13

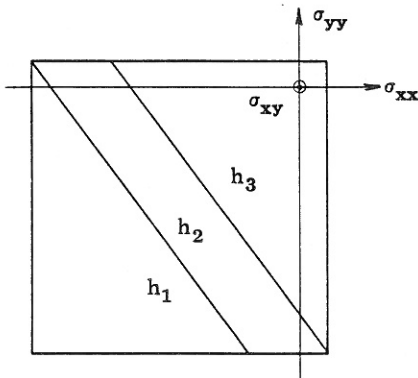
$$\begin{aligned}
 -h_1 &= (\sigma_c + \sigma_{xx} - \varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac}))(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -h_2 &= (\sigma_c + \sigma_{yy})(\sigma_t - \sigma_{yy})/\sigma_c \sigma_t - (\sigma_{xy}/\tau_F)^2 = 0 \\
 -h_3 &= (\sigma_t - (\sigma_{xx} - \varphi(\sigma_{At} - \sigma_t)))(\sigma_t - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

se figur 4.13.

Sættes  $\varphi = 0$  i (4.125), bliver brudbetingelsen for matrixmaterialet

$$\begin{aligned}
 -h_1 &= (\sigma_c + \sigma_{xx})(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -h_2 &= (\sigma_c + \sigma_{yy})(\sigma_t - \sigma_{yy})/\sigma_c \sigma_t - (\sigma_{xy}/\tau_F)^2 = 0 \\
 -h_3 &= (\sigma_t - \sigma_{xx})(\sigma_t - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

se figur 4.14. Dette svarer til, at matrixmaterialet følger hovedspændingshypotesen med en afskæring  $h_2 = 0$ , som dog kun træder i funktion for  $\tau_F^2 < \sigma_c \sigma_t$ .



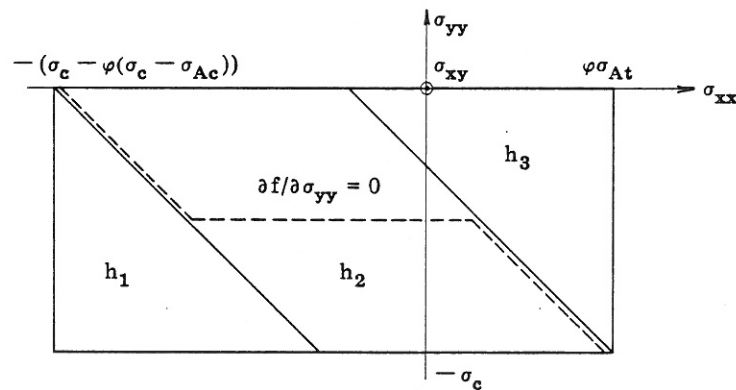
Figur 4.14

Coulomb-materialet kan også opfattes som et materiale, der følger hovedspændingshypotesen med en afskæring svarende til  $\varphi_2 = 0$  efter 4.118. Det bemærkes, at brudfunktionen  $h_2 = 0$  i (4.126) er retningsafhængig, idet  $\sigma_{xx}$  ikke indgår. Det pågældende matrixmateriale er derfor ikke isotropt. Hvis  $h_2 = 0$  i (4.126) erstattes med en isotrop afskæring, bliver brudbetingelsen for et materiale af denne type armeret i én retning lige så kompliceret som brudbetingelsen for et armeret Coulomb-materiale. Dette forhold skal derfor først behandles i forbindelse med armering i 2 retninger.

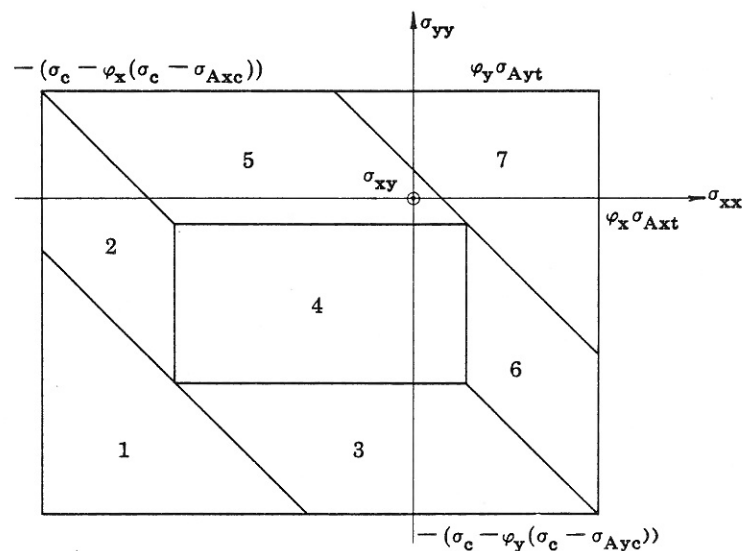
For et Coulomb-materiale armeret i én retning bliver brudbetingelsen forholdsvis simpel, når matrixmaterialets trækstyrke er nul. I dette tilfælde bliver brudfunktionerne

$$\begin{aligned} -h_1 &= (\sigma_c + \sigma_{xx} - \varphi(\sigma_c - \sigma_{Ac}))(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\ -h_2 &= -\sigma_{yy}(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\ -h_3 &= (\sigma_{xx} - \varphi\sigma_{At})\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.127)$$

der afbildes som antydnet i figur 4.15.



Figur 4.15



Figur 4.16

Armeres et Coulomb-materiale uden trækstyrke i to ortogonale retninger, x- og y-retningerne, kan brudbetingelsen bestemmes ud fra figur 4.15. Som vist i figur 4.16 bliver der 7 områder med brudfunktioner som anført i tabel 4.3 med

$$\begin{aligned} -h_{1\alpha} &= (\sigma_c + \sigma_{xx} - \varphi_x t_x)(\sigma_c + \sigma_{yy} - \varphi_y t_y) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\ -h_{2\alpha} &= (\sigma_{xx} - \varphi_x t_x)(\sigma_{yy} - \varphi_y t_y) - \sigma_{xy}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.128)$$

Område $\alpha$	Brud- funktion	$\varphi_x t_x$	$\varphi_y t_y$
1	$h_{11}$	$\varphi_x(\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\varphi_y(\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
2	$h_{12}$	$\varphi_x(\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - \varphi_x(\sigma_c - \sigma_{Axc})$
3	$h_{13}$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - \varphi_y(\sigma_c - \sigma_{Ayc})$	$\varphi_y(\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
4	$h_{14}=h_{24}$	$\sigma_{xx} + \sigma_c/2$	$\sigma_{yy} + \sigma_c/2$
5	$h_{25}$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - \varphi_y \sigma_{Ayt}$	$\varphi_y \sigma_{Ayt}$
6	$h_{26}$	$\varphi_x \sigma_{Axt}$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - \varphi_x \sigma_{Axt}$
7	$h_{27}$	$\varphi_x \sigma_{Axt}$	$\varphi_y \sigma_{Ayt}$

Tabel 4.3

Denne brudbetingelse er udledt af Nielsen [64.09], se også [69.15], som anfører, at man for

$$\varphi_x \sigma_{Axc} = \varphi_x \sigma_{Axt} = \varphi_y \sigma_{Ayc} = \varphi_y \sigma_{Ayt} = \varphi \sigma_F/2 \ll \sigma_c \quad (4.129)$$

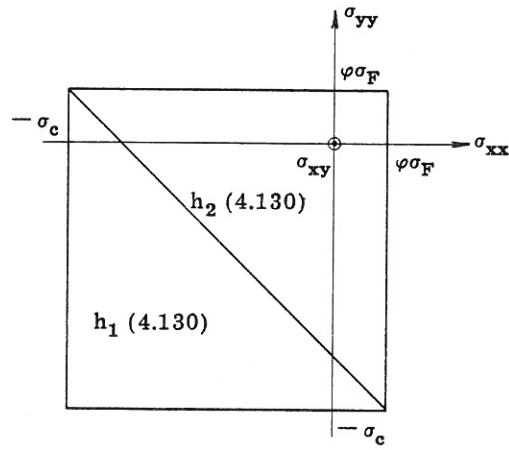
kan se bort fra områderne 2, 3, 4, 5 og 6 og som en tilnærmelse benytte

$$\begin{aligned} -h_1 &= (\sigma_c + \sigma_{xx})(\sigma_c + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\ &\text{for } \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \leq \varphi \sigma_F/2 - \sigma_c \\ -h_2 &= (\sigma_{xx} - \varphi \sigma_F/2)(\sigma_{yy} - \varphi \sigma_F/2) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\ &\text{for } \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \geq \varphi \sigma_F/2 - \sigma_c \end{aligned} \quad (4.130)$$

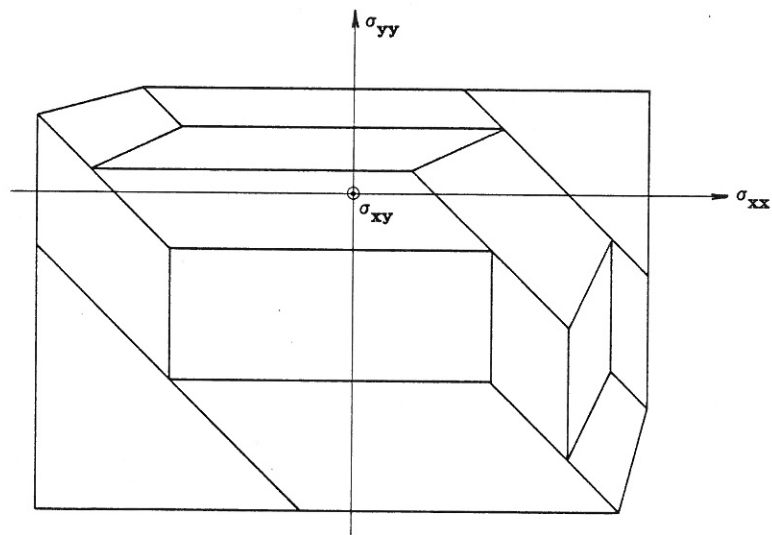
Dette er den ofte anvendte »kvadratiske» brudbetingelse, som afbildes i 2 kegleflader, jf. figur 4.17.

For et Coulomb-materiale med trækstyrke forskellig fra nul, armeret i to ortogonale retninger, kan brudbetingelsen bestemmes ved hjælp af figur 4.12. Som vist i figur 4.18 fremkommer 14 områder. Denne brudbetingelse er udledt af Marti og Thürlimann [77.01], se også Marti [79.09].

Noget simplere bliver forholdene, når man har  $k = 1$  svarende til hovedspændingshypotesen med en isotrop afskæring. Brudbetingelsen bliver da for armering i x- og y-retningerne, jf. (4.118)



Figur 4.17



Figur 4.18

$$\begin{aligned}
-\varphi_1 &= (\sigma_c + \sigma_{xx} - \varphi_x t_x)(\sigma_c + \sigma_{yy} - \varphi_y t_y) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\
-\varphi_2 &= (\sigma_c - (\sigma_{xx} - \varphi_x t_x) + \sigma_{yy} - \varphi_y t_y) \cdot \\
&\quad (\sigma_c - (\sigma_{yy} - \varphi_y t_y) + \sigma_{xx} - \varphi_x t_x) - 4\sigma_{xy}^2 = 0 \\
-g &= (\sigma_t - (\sigma_{xx} - \varphi_x t_x))(\sigma_t - (\sigma_{yy} - \varphi_y t_y)) - \sigma_{xy}^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.131}$$

For de 9 områder i figur 4.19 kan  $\varphi_x t_x$  og  $\varphi_y t_y$  tages fra tabel 4.4. I figur 4.19 er vist brudbetingelser for  $\varphi_x = \varphi_y = 0$ ,  $\varphi_y = 0$  og  $\varphi_x \neq 0$ ,  $\varphi_x = 0$  og  $\varphi_y \neq 0$  samt  $\varphi_x \neq 0$  og  $\varphi_y \neq 0$ .

Område $\alpha$	Brud- funktion	$\varphi_x t_x$	$\varphi_y t_y$
1	$\varphi_{11}$	$\varphi_x (\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\varphi_y (\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
2	$\varphi_{12}$	$\varphi_x (\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - \varphi_x (\sigma_c - \sigma_{Axc})$
3	$\varphi_{23}$	$\varphi_x (\sigma_c - \sigma_{Axc})$	$\varphi_y (\sigma_{Ayt} - \sigma_t)$
4	$\varphi_{14}$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - \varphi_y (\sigma_c - \sigma_{Ayc})$	$\varphi_y (\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
5	$\varphi_{25}$	$\varphi_x t_x - \varphi_y t_y = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$	$\varphi_y t_y - \varphi_x t_x = \sigma_{yy} - \sigma_{xx}$
6	$g_6$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - 2\sigma_t$ $- \varphi_y (\sigma_{Ayt} - \sigma_t)$	$\varphi_y (\sigma_{Ayt} - \sigma_t)$
7	$\varphi_{27}$	$\varphi_x (\sigma_{Axt} - \sigma_t)$	$\varphi_y (\sigma_c - \sigma_{Ayc})$
8	$g_8$	$\varphi_x (\sigma_{Axt} - \sigma_t)$	$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_c - 2\sigma_t - \varphi_x (\sigma_{Axt} - \sigma_t)$
9	$g_9$	$\varphi_x (\sigma_{Axt} - \sigma_t)$	$\varphi_y (\sigma_{Ayt} - \sigma_t)$

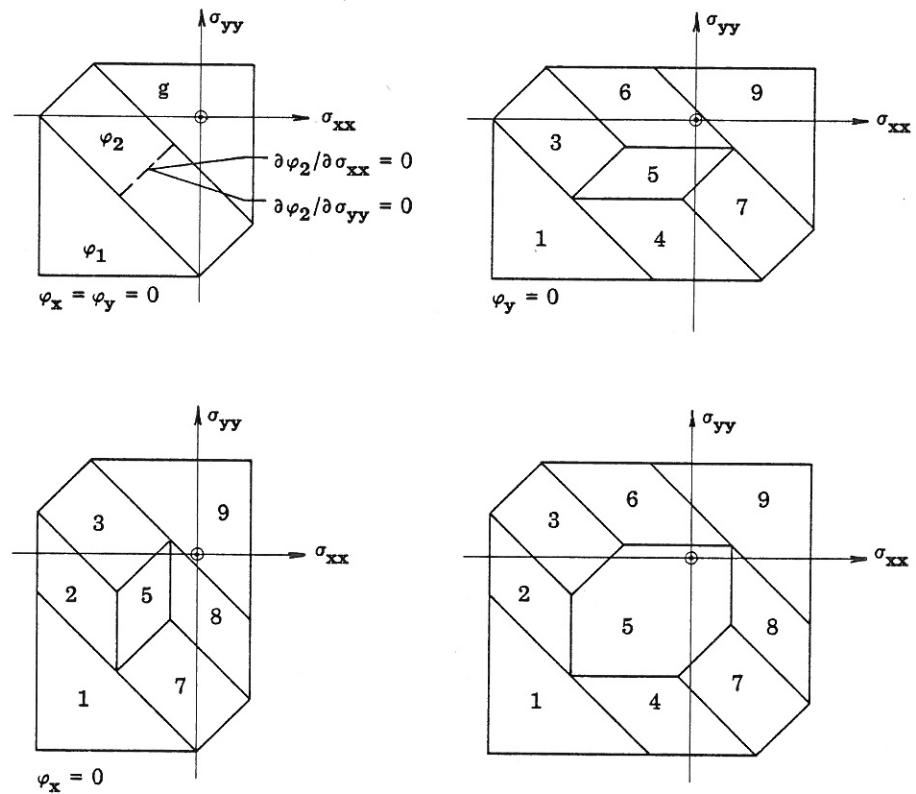
Tabel 4.4

I område 5 er brudfunktionen meget simpel, nemlig

$$\varphi_2 = -\sigma_c^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 0 \tag{4.132}$$

Armeringsspændingerne derimod er ikke i alle tilfælde entydigt bestemt i dette område, dog skal

$$\varphi_x t_x - \varphi_y t_y = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \tag{4.133}$$



Figur 4.19

#### 4.3.3 Sammenligning af brudbetingelser

I dette afsnit skal nogle brudbetingelser sammenlignes, idet brudstyrken ved nogle simple, plane påvirkninger bestemmes. Udover de ovenfor behandlede brudbetingelser for armerede materialer skal også nogle af de brudbetingelser, der i tidens løb er foreslået for anisotrope materialer, inddrages i sammenligningen. Disse brudbetingelser er følgende:

*Jacobys brudbetingelse* [09.01]

$$\sigma_{c\theta} = \sigma_{cx} \cos^2 \theta + \sigma_{cy} \sin^2 \theta \quad (4.134)$$

hvor

$\sigma_{c\theta}$  er styrken ved enakset tryk, som danner vinklen  $\theta$  med x-aksen,

$\sigma_{cx}$  er trykstyrken i x-retningen,

$\sigma_{cy}$  er trykstyrken i y-retningen,

x- og y-akserne er 2-fold symmetriakser.

Erstattes indeks c med t, gælder det tilsvarende udtryk for træk.

*Hankinsons brudbetingelse* [21.01]

$$\sigma_{c\theta} = \sigma_{cx}\sigma_{cy}/(\sigma_{cx}\sin^2\theta + \sigma_{cy}\cos^2\theta) \quad (4.135)$$

*Stüssis brudbetingelse* [46.01]

$$\sigma_{c\theta} = \min \begin{cases} \sigma_{cx}/\cos^2\theta \\ \tau_{xy}/\sin\theta\cos\theta \\ \sigma_{cy}/\sin^2\theta \end{cases} \quad (4.136)$$

Foruden de ovenfor omtalte styrkeparametre indeholder Stüssis brudbetingelse en forskydningsstyrke  $\tau_{xy}$ , og den kan mere generelt for plane spændingstilstande angives som

$$\begin{aligned} \sigma_{cx} + \sigma_{yx} &= 0, & \sigma_{tx} - \sigma_{xx} &= 0, & \sigma_{xy}^2 - \tau_{xy}^2 &= 0 \\ \sigma_{cy} + \sigma_{yy} &= 0, & \sigma_{ty} - \sigma_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (4.137)$$

hvor x- og y-akserne er 2-fold symmetriakser. Den kan derfor benyttes ved vilkårlige plane spændingstilstande i modsætning til Jacobys og Hankinsons som kun antages at gælde ved enakset påvirkning.

Det skal nævnes, at Stüssis brudhypotese er blevet genfremsat i forbindelse med fiberarmerede metaller styrke, se fx Stowell & Liu [61.03].

*Hills brudbetingelse* [48.08]

$$\begin{aligned} F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 \\ + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.138)$$

hvor

$$\begin{aligned} G + H &= 1/\sigma_{cx}^2, H + F = 1/\sigma_{cy}^2, F + G = 1/\sigma_{cz}^2 \\ 2F &= 1/\sigma_{cy}^2 + 1/\sigma_{cz}^2 - 1/\sigma_{cx}^2 \\ 2G &= 1/\sigma_{cz}^2 + 1/\sigma_{cx}^2 - 1/\sigma_{cy}^2 \\ 2H &= 1/\sigma_{cx}^2 + 1/\sigma_{cy}^2 - 1/\sigma_{cz}^2 \\ 2L &= 1/\tau_{yz}^2 \\ 2M &= 1/\tau_{zx}^2 \\ 2N &= 1/\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (4.139)$$

Hills betingelse, som dækker vilkårlige spændingstilstande, forudsætter samme træk- og trykstyrke i x-, y- og z-retningerne, dvs.  $\sigma_{cx} = \sigma_{tx}$ ,  $\sigma_{cy} = \sigma_{ty}$  og  $\sigma_{cz} = \sigma_{tz}$ . Af (4.138) fremgår, at et hydrostatisk tryk ikke kan frembringe brud.

For plane spændingstilstande  $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0$  reduceres Hills brudbetingelse til

$$F\sigma_{yy}^2 + G\sigma_{xx}^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1 \quad (4.140)$$

eller

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xx}/\sigma_{cx})^2 + (\sigma_{yy}/\sigma_{cy})^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}/(1/\sigma_{cx}^2 + 1/\sigma_{cy}^2 - 1/\sigma_{cz}^2) \\ & + (\sigma_{xy}/\tau_{xy})^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.141)$$

Da en del materialer, herunder isotrope materialer, som kun er armeret i x-retningen, har samme styrke i y- og z-retningerne, bliver brudbetingelsen for disse materialer som anført af Azzi & Tsai [65.12]

$$(\sigma_{xx}/\sigma_{cx})^2 + (\sigma_{yy}/\sigma_{cy})^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}/\sigma_{cx}^2 + (\sigma_{xy}/\tau_{xy})^2 = 1 \quad (4.142)$$

Tsai [68.07] foreslår, at (4.142) benyttes, når  $\sigma_{xx}$  og  $\sigma_{yy}$  er trykspændinger, og at  $\sigma_{cx}$  og  $\sigma_{cy}$  erstattes med  $\sigma_{tx}$  og  $\sigma_{ty}$ , når  $\sigma_{xx}$  og  $\sigma_{yy}$  er trykspændinger, og træk- og trykstyrkerne er forskellige. Hvad man skal gøre med hensyn til ledet  $\sigma_{xx}\sigma_{yy}/\sigma_{cx}^2$ , når den ene normalspænding er en trykspænding og den anden en trækspænding, oplyses ikke, se dog [66.11].

En brudbetingelse for materialer med forskellige træk- og trykstyrker og med mulighed for brud ved hydrostatisk påvirkning er fremsat af Caddell, Raghava & Atkins [73.09]. Den generelle form af denne brudbetingelse er

$$\begin{aligned} & F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \\ & 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{zx}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + K_x\sigma_{xx} + K_y\sigma_{yy} + K_z\sigma_{zz} = 1 \end{aligned} \quad (4.143)$$

med

$$\begin{aligned} & G + H = 1/\sigma_{cx}\sigma_{tx}, H + F = 1/\sigma_{cy}\sigma_{ty}, F + G = 1/\sigma_{cz}\sigma_{tz} \\ & L, M \text{ og } N \text{ som i (4.138)} \end{aligned} \quad (4.144)$$

$$K_x = (\sigma_{cx} - \sigma_{tx})/\sigma_{cx}\sigma_{tx}, K_y = (\sigma_{cy} - \sigma_{ty})/\sigma_{cy}\sigma_{ty},$$

$$K_z = (\sigma_{cz} - \sigma_{tz})/\sigma_{cz}\sigma_{tz}$$

I det plane tilfælde med  $\sigma_{cy} = \sigma_{cz}$  og  $\sigma_{ty} = \sigma_{tz}$  reduceres denne betingelse til

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx}^2/\sigma_{cx}\sigma_{tx} + \sigma_{yy}^2/\sigma_{cy}\sigma_{ty} - \sigma_{xx}\sigma_{yy}/\sigma_{cx}\sigma_{tx} + (\sigma_{xy}/\tau_{xy})^2 + \\ & (\sigma_{cx} - \sigma_{tx})\sigma_{xx}/\sigma_{cx}\sigma_{tx} + (\sigma_{cy} - \sigma_{ty})\sigma_{yy}/\sigma_{cy}\sigma_{ty} = 1 \end{aligned} \quad (4.145)$$

I såvel (4.138) som (4.143) er x-, y- og z-akserne 2-fold symmetriakser, der er altså tale om ortotrope materialer. Man bemærker, at for  $\sigma_c = \sigma_t$  reduceres (4.143) til (4.138).

En brudbetingelse fremsat af Tsai og Wu [71.14], se også Wu [74.16], kan skrives

$$F^{kl}\sigma_{kl} + F^{klmn}\sigma_{kl}\sigma_{mn} = 1 \quad (4.146)$$



hvor  $\underline{F}$ -erne er tensorer, som indeholder materialets styrkeparametre. Denne betingelse kan beskrive vilkårligt anisotrope materialer og indeholder som specialtilfælde (4.143) og (4.138). Vedrørende andre brudhypoteser henvises til en oversigtsartikel af Sendekyj [72.16].

I ovenstående er indført nogle styrkeparametre, som ikke direkte optræder i brudbetingelserne for armerede v. Mises- og Coulomb materialer. Af hensyn til sammenligning sættes derfor i brudbetingelserne for v. Mises- og Coulomb materialer armeret i x-retningen, som er de eneste der vil blive sammenlignet

$$\begin{aligned}
 \sigma_c &= \sqrt{3} \sigma_{cy}/2 && \text{v. Mises materiale} \\
 \sigma_c &= \sigma_{cy}, \quad \sigma_t = \sigma_{ty} && \text{Coulomb materiale} \\
 \sigma_c + \varphi_x(\sigma_{Ac} - \sigma_c) &= \sigma_{cx} \\
 \sigma_t + \varphi_x(\sigma_{At} - \sigma_t) &= \sigma_{tx}
 \end{aligned} \tag{4.147}$$

Hermed kan brudbetingelsen (4.100) for et armeret v. Mises materiale skrives

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 2(\sigma_{xx} + \sigma_{cx} - \sqrt{3} \sigma_{cy}/2)^2 - 2(\sigma_{xx} + \sigma_{cx} - \sqrt{3} \sigma_{cy}/2)\sigma_{yy} \\
 &\quad + 2\sigma_{yy}^2 + 6\sigma_{xy}^2 - 3\sigma_{cy}^2/2 = 0 \\
 f_2 &= 3\sigma_{yy}^2/2 + 6\sigma_{xy}^2 - 3\sigma_{cy}^2/2 = 0 \\
 f_3 &= 2(\sigma_{xx} - \sigma_{tx} + \sqrt{3} \sigma_{cy}/2)^2 - 2(\sigma_{xx} - \sigma_{tx} + \sqrt{3} \sigma_{cy}/2)\sigma_{yy} \\
 &\quad + 2\sigma_{yy}^2 + 6\sigma_{xy}^2 - 3\sigma_{cy}^2/2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.148}$$

mens brudbetingelsen (4.122) for et armeret Coulomb materiale bliver

$$\begin{aligned}
 -\varphi_{11} &= (\sigma_{cx} + \sigma_{xx})(\sigma_{cy} + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -\varphi_{22} &= ((k+1)\sigma_{cy} - k\sigma_{cx} - k\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(\sigma_{cx} - k\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) \\
 &\quad - (k+1)^2\sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -\varphi_{13} &= -\sigma_{yy}(\sigma_{cy} + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -\varphi_{24} &= (\sigma_{cy} - (k-1)\sigma_{yy})^2 - 4k\sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -g_5 &= (\sigma_{cy} - k\sigma_{ty} + \sigma_{yy})(\sigma_{ty} - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -\varphi_{26} &= (\sigma_{cy} + k(\sigma_{tx} - \sigma_{ty}) + k\sigma_{xx} + \sigma_{yy})(\sigma_{cy} - (\sigma_{tx} - \sigma_{ty}) - k\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) \\
 &\quad - (k+1)^2\sigma_{xy}^2 = 0 \\
 -g_7 &= (\sigma_{tx} - \sigma_{xx})(\sigma_{ty} - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.149}$$

Herefter betragtes enakset påvirkning samt forskydning kombineret med træk og tryk. Det betragtede materiale har

$$\sigma_{ty} = t, \sigma_{cy} = 5t, \sigma_{tx} = \sigma_{cx} = 10t, \tau_{xy} = 2t \quad (4.150)$$

og for det armerede Coulomb materiale er dermed  $k = 1$ . Det armerede v. Mises materiale er ikke medtaget i sammenligningen, da dette materiale har samme træk- og trykstyrke i y-retningen. Samme forhold gør sig gældende for et materiale, der følger Hills brudbetingelse (4.142), hvorfor den modificerede udgave (4.145) er benyttet. I tilfældet enakset tryk er dog bæreevnen efter såvel (4.142) som (4.145) udregnet. Det skal bemærkes, at man kan benytte (4.145) med  $\sigma_{cx} = \sigma_{cy}$  og  $\sigma_{tx} = \sigma_{ty}$  som en modificeret udgave af et v. Mises materiale, som er isotropt, når  $\tau_{xy}^2 = \sigma_{cx}\sigma_{tx}/3$ .

Hankinsons og Jacobis brudbetingelser kan opfattes som specialtilfælde af en mere generel brudbetingelse givet ved

$$\begin{aligned} -h_1 &= (\sigma_{cx} + \sigma_{xx})(\sigma_{cy} + \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \\ -h_2 &= (\sigma_{tx} - \sigma_{xx})(\sigma_{ty} - \sigma_{yy}) - \sigma_{xy}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.151)$$

idet Hankinsons formel svarer til enakset spændingspåvirkning, mens Jacobys formel svarer til enakset tøjningspåvirkning med

$$\epsilon_{k\ell} = \lambda \partial h / \partial \sigma^{k\ell} \quad (4.152)$$

hvor  $\lambda$  er en ubestemt konstant, se i øvrigt Nielsen [69.15]. Vedrørende brudbetingelsen (4.151) skal det bemærkes, at den med  $\sigma_{cx} = \sigma_{cy} = \sigma_c$  og  $\sigma_{tx} = \sigma_{ty} = \varphi \sigma_F / 2$  er identisk med (4.130), som er en brudbetingelse for et isotropt materiale. Normalt vil samme armering i to ortogonale retninger ikke medføre isotropi, eller rettere transvers isotropi, hertil kræves samme armering i tre retninger, som danner  $120^\circ$  med hinanden og ligger i samme plan. Grunden til, at man i dette tilfælde får et materiale med transvers isotropi, når der er samme armering i to ortogonale retninger, er, at forskydningsstyrken ikke indgår som en selvstændig parameter.

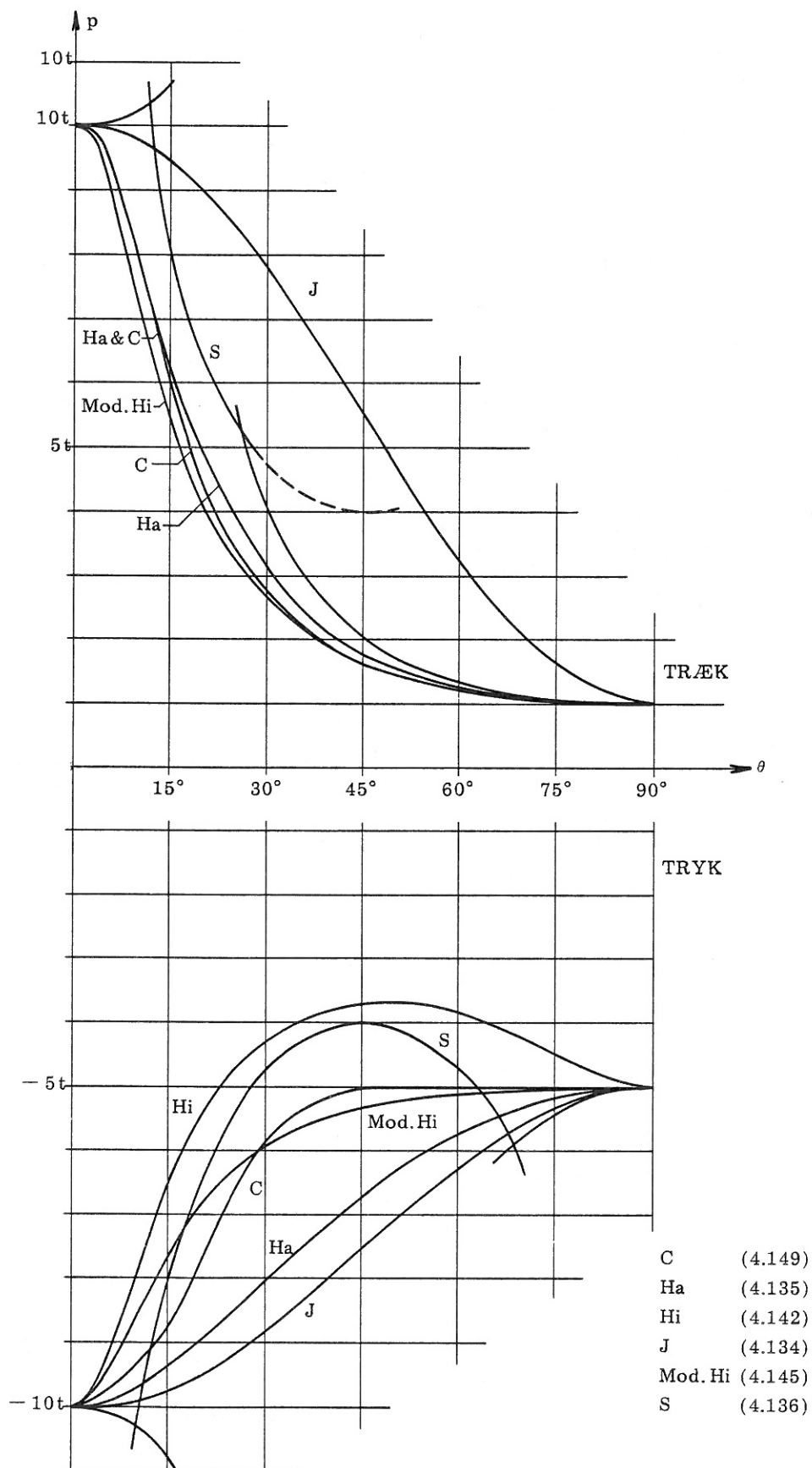
#### Enakset påvirkning

Ved enakset påvirkning  $p$  i en retning, som danner vinklen  $\theta$  med x-aksen, er

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= p \cos^2 \theta \\ \sigma_{xy} &= p \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{yy} &= p \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.153)$$

I figur 4.20 er bæreevnen efter de ovenfor omtalte brudbetingelser optegnet som funktion af vinklen  $\theta$ .

Ved enakset tryk skiller Hankinsons og Jacobys brudbetingelser sig tydeligt ud fra de øvrige, hvilket skyldes, at de som nævnt ikke tager hensyn til forskydningsstyrken. Yderligere bemærker man den ret store forskel mellem Hills oprindelige betingelse (4.142) og den modificerede udgave (4.145). Da (4.142) antages at gælde for et materiale med samme træk- og trykstyrke i y-retningen, er det den lille forskydningsstyrke, som er skyld i de små værdier af  $p$ , som findes for  $20^\circ < \theta < 90^\circ$ . Disse små trykstyrker beskrives også



Figur 4.20

af Stüssis brudbetingelse, men ikke af Coulombs eller den modificerede udgave af Hills. Tsai, Adams & Doner [66.11] refererer forsøg, som antyder, at trykstyrken i et vinkelområde er mindre end trykstyrken i y-retningen. Da kun de bearbejdede resultater angives, mens forsøgsopstillingen ikke beskrives, kan det ikke afgøres, om der er fejl i tolkningen. Om Stüssis betingelse skal anføres, at den ikke kan benyttes til beskrivelse af et isotropt materiales brud. Dette skyldes, at  $\sigma_{xy}^2 - \tau_{xy}^2 = 0$  i (4.137) ikke er en isotrop afskæring af en betingelse, der i øvrigt kunne opfattes som en hovedspændingshypotese. Ved enakset træk er det især Jacobys betingelse, der skiller sig ud fra de øvrige. Opfattes Jacobys betingelse som gældende for enakset stræk, er der ikke noget mærkeligt heri, da spændingstilstanden ved enakset stræk er temmelig forskellig fra spændingstilstanden enakset træk.

#### *Forskydning, træk og tryk*

Ved forskydning  $q$  kombineret med træk eller tryk  $p$  i x-retningen er

$$\sigma_{xx} = p, \sigma_{xy} = q, \sigma_{yy} = 0 \quad (4.154)$$

I figur 4.21 er angivet de kombinationer af  $p$  og  $q$ , som medfører brud i henhold til forskellige brudbetingelser.

Forsøg med træ refereret i [78.08] viser, at dette materiale følger en brudbetingelse, der ret nøje svarer til brudbetingelsen for et armeret Coulomb materiale.

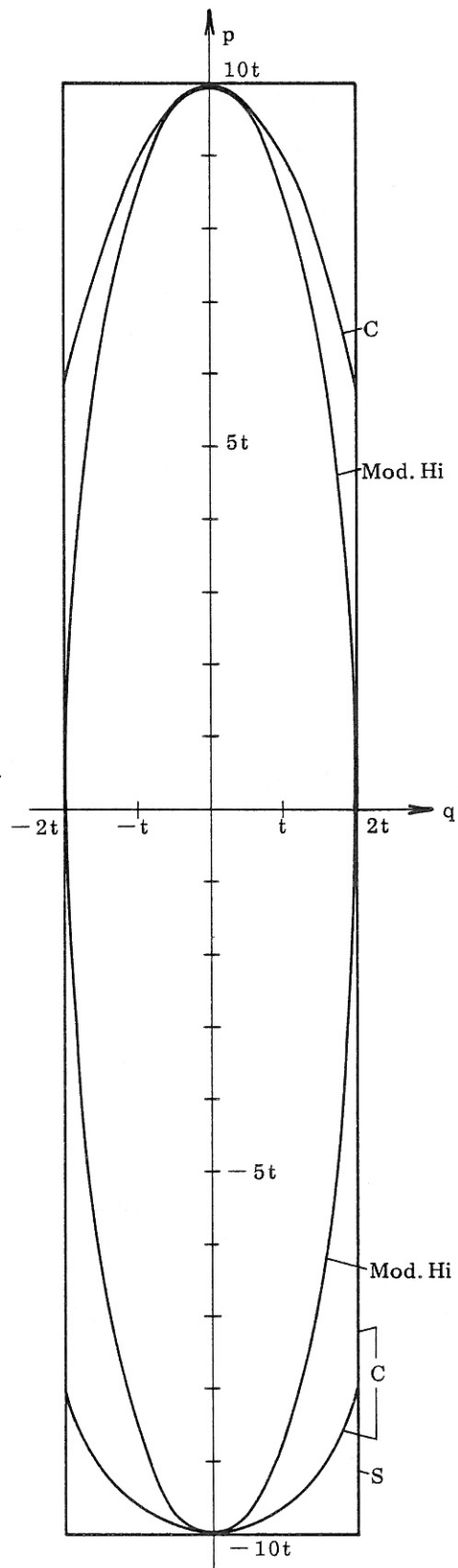
---

#### 4.4 Ideale fiberarmerede materialer

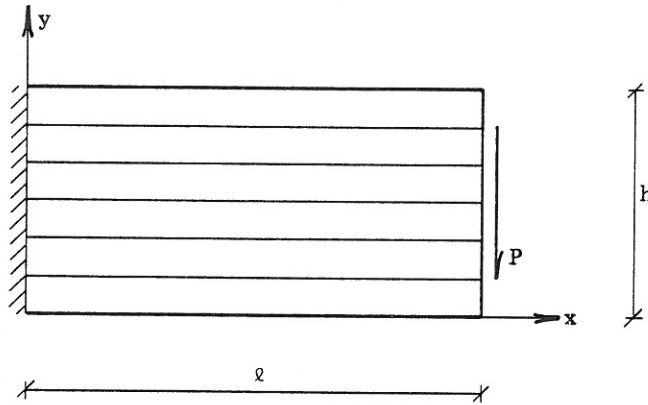
Ofte vil armeringen i et kompositmateriale være meget stiv i forhold til matrixmaterialet. Når dette er tilfældet, vil materialet, når det udsættes for ydre påvirkninger, deformeres på en sådan måde, at længdetøjningerne i armeringsretningerne bliver små i forhold til de øvrige tøjninger. Man kan derfor som en tilnærmelse antage, at materialet er ustrækkeligt i armeringsretningerne, hvilket medfører visse lettelser i beregningsarbejdet. Yderligere lettelser opnås, hvis man samtidig antager, at materialet er usammentrykkeligt, idet man da ofte vil være i den situation, at materialets deformationer kan bestemmes hovedsagelig ud fra geometriske overvejelser. Et materiale, som regnes såvel ustrækkeligt i armeringsretningerne som usammentrykkeligt, kaldes et *idealt fiberarmeret materiale*.

Som omtalt i appendix D medfører geometriske bindinger ubestemte spændinger i dette tilfælde et ubestemt træk eller tryk i hver armeringsretning og et ubestemt hydrostatisk træk eller tryk. Det er således kun en del af spændingstensoren, som afhænger af tøjningerne.

Antagelsen om både ustrækkelighed og usammentrykkelighed er åbenbart indført af Adkins og Rivlin [55.01], [55.03], [56.02], se også [60.02]. Teorien er videreudviklet af blandt andre Mulhern, Pipkin, Rogers og Spencer [67.03], [69.02], [71.01], [71.02], [71.03], [72.01], [72.02], [74.04], [74.05], [75.05], [75.10] og [79.10].



Figur 4.21



Figur 4.22.

Som et eksempel på anvendelse af teorien for ideale fiberarmerede materialer betragtes en rektangulær skive indspændt langs den ene side, se figur 4.22. Skiven er armeret i én retning parallel med x-aksen som antydnet i figuren. Eksemplet skal illustrere for det første den lethed, hvormed visse problemer kan løses, og for det andet nogle af de specielle forhold, som forekommer inden for teorien. Det forudsættes, at skiven udsættes for infinitesimale tøjninger og plan deformationstilstand.

Ustrækkelighed i armeringsretningen udtrykkes ved

$$\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x = 0 \quad (4.155)$$

og usammentrykkelighed ved

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 0 \quad (4.156)$$

Idet man for en plan deformationstilstand har

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (4.157)$$

bliver usammentrykkelighedsbetingelsen (4.156) sammen med (4.155) og (4.157)

$$\epsilon_{yy} = \partial v / \partial y = 0 \quad (4.158)$$

Af (4.155) og (4.158) følger, at  $u$  er en funktion af  $y$  alene, og  $v$  er en funktion af  $x$  alene,

$$u = u(y) \quad , \quad v = v(x) \quad (4.159)$$

Materialet er altså også ustrækkeligt i  $y$ -retningen i en plan deformationstilstand og kunne lige så godt være armeret i både  $x$ - og  $y$ -retningerne. Det skal i denne forbindelse nævnes, at et materiale armeret i to ortogonale retninger og påvirket til plan deformationstilstand i armeringsplan inden for teorien for store deformationer er stift, se fx Spencer [72.02]. Inden for teorien for små deformationer derimod er forskydningsdeformationer mulige.

Det bemærkes, at resultatet (4.159) er fundet uden anvendelse af konstitutive ligninger og randbetingelser.

Randbetingelsen

$$u(y) = 0 \quad \text{for } x = 0 \quad (4.160)$$

giver

$$u(y) = 0 \quad \text{overalt} \quad (4.161)$$

og tilbage står kun at bestemme  $v(x)$ .

For et lineærelastisk materiale, som udviser transvers isotropi med hensyn til en karakteristisk retning, her armeringsretningen, kan de konstitutive ligninger i dette tilfælde skrives

$$\sigma_{kl} = p\delta_{kl} + ta_k a_l + 2\mu_T \epsilon_{kl} + 2(G - \mu_T)(a_k a^m \epsilon_{ml} + a_l a^m \epsilon_{mk}) \quad (4.162)$$

hvor

$p$  er et arbitrært hydrostatisk tryk/træk

$t$  er et arbitrært træk/tryk

$G$  er forskydningsmodulen for forskydninger  $xy$  og  $zx$

$\mu_T$  er forskydningsmodulen for forskydninger  $yz$

$a_k = a^k$  er armeringsretningen.

Med  $a_k = a^k = (1 \ 0 \ 0)$  har man

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= t + p \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = p \\ \sigma_{xy} &= G(u'(y) + v'(x)) \end{aligned} \quad (4.163)$$

hvor  $u' = du/dy$  og  $v' = dv/dx$ .

Indsættes (4.163) i ligevægtsligningerne

$$\partial \sigma_{xx} / \partial x + \partial \sigma_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial \sigma_{xy} / \partial x + \partial \sigma_{yy} / \partial y = 0 \quad (4.164)$$

fås

$$\partial(t + p) / \partial x + Gu''(y) = 0, \quad Gv''(x) + \partial p / \partial y = 0 \quad (4.165)$$

hvoraf følger

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= t + p = f(y) - Gxu''(y) \\ \sigma_{yy} &= p = g(x) - Gyv''(x) \end{aligned} \quad (4.166)$$

Randbetingelserne

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \text{for } y = 0 \quad \text{og } y = h \quad (4.167)$$

medfører

$$g(x) = 0, \quad v''(x) = 0$$

og dermed

$$v = \varphi x + K \quad (4.168)$$

hvor  $\varphi$  og  $K$  er konstanter. Da  $v = 0$  for  $x = 0$ , er  $K$  lig med nul, altså

$$v = \varphi x \quad (4.169)$$

Konstanten  $\varphi$  bestemmes af

$$-P = \int_0^h \sigma_{xy} dy = \int_0^h G\varphi dy = G\varphi h \quad (4.170)$$

som giver

$$\varphi = -P/Gh \quad (4.171)$$

Den første ligning i (4.166) bliver i dette tilfælde med  $u(y) = 0$

$$\sigma_{xx} = f(y) \quad (4.172)$$

og den arbitrære funktion  $f(y)$  bestemmes af randbetingelsen

$$\sigma_{xx} = 0 \quad \text{for } x = l \quad (4.173)$$

til at være lig med nul

$$f(y) = 0 \quad (4.174)$$

Hermed er flytningerne  $u$  og  $v$  samt de arbitrære funktioner  $f(y)$  og  $g(x)$  og dermed  $p$  og  $t$  bestemt, hvilket betyder, at også spændingerne er bestemt.

Det er imidlertid indlysende, at normalspændingerne  $\sigma_{xx} = 0$  ikke kan være i momentligevægt med kraften  $P$ , ligesom forskydningsspændingerne

$$\sigma_{xy} = G\varphi = -P/h \quad (4.275)$$

ikke tilfredsstiller randbetingelserne

$$\sigma_{xy} = 0 \quad \text{for } y = 0 \quad \text{og } y = h \quad (4.176)$$

Den ovenfor fundne løsning må derfor modificeres under hensyn hertil.

Antager man, at der i enkelte fibre kan optræde kræfter af endelig størrelse svarende til uendelig store normalspændinger, kan en løsning angives som

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= P(l-x)(\delta(y-h) - \delta(y))/h \\ \sigma_{xy} &= -P(H(y) - H(y-h))/h \\ \sigma_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (4.177)$$

hvor  $\delta(\cdot)$  er Dirac's deltafunktion og  $H(\cdot)$  er Heaviside's stepfunktion. Denne løsning er i overensstemmelse med den først fundne i det indre af skiven og tilfredsstiller yderligere momentligevægtsligningen



$$P(\ell - x) = \int_0^h \sigma_{xx}(y - y_0)dy, \quad y_0 = \text{konstant} \quad (4.178)$$

samt randbetingelserne (4.176). Fibrene  $y = 0$  og  $y = h$  optræder altså som stringere, i hvilke der foruden tryk- eller trækkræfter også forekommer forskydningsspændinger som i dette tilfælde, på en uendelig kort strækning vinkelret på stringerne varierer mellem 0 og  $-P/h$ .

Endelig betragtes randbetingelsen

$$\sigma_{xy} = p_y \quad \text{for} \quad x = \ell, \quad P = - \int_0^h p_y dy \quad (4.179)$$

som foreskriver, hvorledes kraften  $P$  skal fordeles på randen  $x = \ell$ . Hvis løsningen

$$u(y) = 0, \quad v(x) = -Px/Gh \quad (4.180)$$

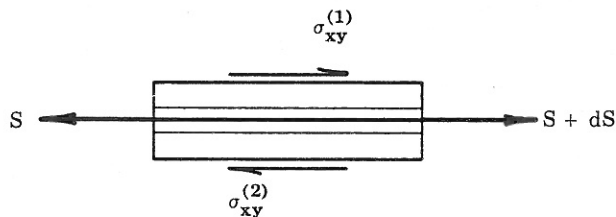
samt (4.177), som er bestemt uden hensyn til hvorledes  $P$  er fordelt, skal gælde for andre fordelinger, må man yderligere antage, at der langs randen  $x = \ell$  eksisterer en stringer i hvilken forskydningsspændingerne varierer mellem  $-P/h$  og den aktuelle værdi af  $p_y$ .

Forekomsten af stringere enten parallelt med eller vinkelret på armeringsretningen er karakteristisk for denne teori. Stringerne kan forekomme langs randen som i ovenstående eksempel, men man kan også komme ud for, at der optræder stringere i det indre af en skive. I begge tilfælde bestemmes stringerkraften  $S$  ved

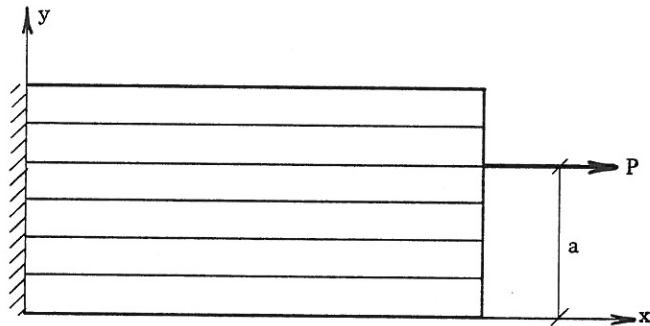
$$dS/dx = \sigma_{xy}^{(2)} - \sigma_{xy}^{(1)} \quad (4.181)$$

jf. figur 4.23.

I de teorier for anisotrope materialer, som ikke bygger på antagelser om ustrækkelighed, forekommer nok i visse tilfælde singulære punkter, men ikke singulære kurver som de her omtalte. Undersøgelser baseret på den lineære elasticitetsteori for anisotrope materialer viser, at der, når længdetøjningen i en retning og sammentrykkeligheden går mod nul, vil optræde tynde lag med store normalspændingskoncentrationer og store forskydningsspændingsvariationer, se Everstine & Pipkin [71.07] og [73.03] samt Spencer [74.04].



Figur 4.23.



Figur 4.24

Et andet forhold, som gør sig gældende i denne idealiserede teori, kan belyses ved at betragte skiven fra figur 4.22, men her belastet med en kraft i armeringsretningen, se figur 4.24. Alle flytninger bliver nul ligesom spændingerne  $\sigma_{xy}$  og  $\sigma_{yy}$ , mens  $\sigma_{xx}$  bliver

$$\sigma_{xx} = P\delta(y - a) \quad (4.182)$$

hvilket bl.a. viser, at Saint-Venants princip absolut ikke kan anvendes i dette tilfælde. Undersøgelser vedrørende randeffekters udbredelse i anisotrope materialer er udført af blandt andre Choi og Horgan [72.10], [72.11], [74.11] og [77.05].

Flertallet af de i litteraturen beskrevne eksempler omhandler legemer påvirket til plan deformationstilstand og begrænset af linier parallelle med armeringsretningen og vinkelret herpå. Endvidere er der i de fleste tilfælde så mange geometriske randbetingelser, at legemets flytninger i hovedsagen er bestemt ud fra disse. Randbetingelser udtrykt alene ved spændinger er behandlet af England [72.08] samt, i forbindelse med revneproblemer, af England & Rogers [73.01] og i forbindelse med inklusioner af England [75.01]. I [72.08] har England endvidere betragtet legemer, som er begrænset af linier, der ikke er parallelle med eller vinkelrette på armeringsretningen.

Mens antagelsen om ustrækkelighed i armeringsretningerne er en udmærket tilnærmelse for mange armerede materialer, vil antagelsen om usammentrykkelighed kun i færre tilfælde være en brugbar tilnærmelse. En teori, som kun forudsætter ustrækkelighed i armeringsretningen for et materiale armeret i 1 retning, er opstillet af England, Ferrier & Thomas [73.05], Morland [73.02] og Spencer [74.04]. I begge tilfældene, plan deformationstilstand og plan spændingstilstand, fører teorien til ligninger, som er identiske bortset fra nogle konstanter, jf. appendix F. Mens antagelsen om usammentrykkelighed fører til yderligere simplifikationer, når der er tale om plan deformationstilstand, er dette ikke tilfældet ved plan spændingstilstand.

I den ideale teori, som forudsætter såvel ustrækkelighed som usammentrykkelighed, kan man spalte spændingstensor  $\underline{g}$  i reaktionsspændingerne  $\underline{t}$  og ekstraspændingerne  $\underline{s}$ , så

$$\sigma_{k\ell} = t_{k\ell} + s_{k\ell} \quad (4.183)$$

Reaktionsspændingerne  $t$  er reaktioner til de geometriske bindinger, og de er for armering i 1 retning bestemt ved

$$t_{k\ell} = p\delta_{k\ell} + ta_k a_\ell \quad (4.184)$$

jf. (4.162) og appendix D.

Ekstraspændingerne  $s$  må bestemmes ved konstitutive ligninger. I en plan deformationstilstand og armering i  $x$ -retningen er  $\varphi_{xy} = u'(y) + v'(x)$  den eneste tøjning forskellig fra nul, og spændingerne  $\sigma_{yz}$  og  $\sigma_{zx}$  vil, når matrixmaterialet er isotropt, være lig med nul, således at kun  $s_{xy}$  og  $s_{zz}$  skal bestemmes ved konstitutive ligninger, som altså blot skal være relationer mellem  $s_{xy}$ ,  $s_{zz}$  og  $\varphi_{xy}$ . Dette resultat, som skyldes Pipkin og Rogers [71.02], medfører, at plane deformationstilstande i en vis udstrækning er uafhængige af de konstitutive ligninger.

Teorien for ideale fiberarmerede materialer viser, at forskydningsdeformationerne er meget fremtrædende i forhold til bøjningsdeformationerne. Dette forhold må antages at gælde også for stærkt anisotrope men ikke ideale materialer og en a priori antagelse om, at et konstruktionselement hovedsagelig påvirkes til bøjning, må derfor forventes at kunne føre til helt uacceptable resultater.

---

APPENDIX A. SYMBOLER

De størrelser, der indgår i beskrivelsen af et kontinuert mediums opførsel, som fx flytninger, tøjninger og spændinger, repræsenteres ved tensorer. Idet den sædvanlige tensoranalysens konventioner og regneregler forudsættes bekendt, skal der her blot gøres rede for nogle specielle symboler og konventioner.

En vektor symboliseres ved et bogstav med en streg over, fx  $\bar{v}$ . En enhedsvektor med  $\bar{v}$ 's retning betegnes  $\hat{v}$  og  $\bar{v}$ 's størrelse med  $v$ , dvs.

$$\bar{v} = v\hat{v}, \quad \hat{v} \cdot \hat{v} = 1, \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = v^2 \quad (\text{A.1})$$

Vektorer er tensorer af første orden. En tensor af højere orden symboliseres ved et bogstav med et antal streger over svarende til tensorens orden, eksempelvis  $\bar{\bar{c}}$  for en andenordens tensor. Tensorer af nulte orden er skalarer. Er det i en given sammenhæng unødvendigt at præcisere en tensors orden symboliseres tensoren ved et bogstav med en tilde under, fx  $\underline{t}$ .

Udtrykt ved basisvektorer  $\bar{b}_k$  og reciprokke basisvektorer  $\bar{b}^k$ , har man

$$\underline{a} = a^{k\ell} \dots \bar{b}_k \bar{b}_\ell \dots = a_{k\ell} \dots \bar{b}^k \bar{b}^\ell \dots = a_\ell^k \dots \bar{b}_k \dots \bar{b}^\ell \dots \quad (\text{A.2})$$

hvor de indicerede størrelser  $a^{k\ell} \dots$ ,  $a_{k\ell} \dots$  og  $a_\ell^k \dots$  er tensorens komponenter med hensyn til de pågældende basisvektorer. Ordet tensor benyttes også som betegnelse for en tensors komponenter.

Tensorkomponenter kan angives på matrixform, og tensormultiplikation kan udføres som matrixmultiplikation. Når en tensor i et udtryk skal opfattes som en matrix, symboliseres dette ved kantede parenteser, fx  $[a_m^{k\ell}]$ .

Medmindre andet er præciseret, benyttes ortonormerede basisvektorer  $\hat{i}_k = \hat{i}^k$  mellem hvilke der gælder

$$\begin{aligned} \hat{i}_k \cdot \hat{i}^\ell &= \delta_k^\ell, \quad \hat{i}_k \cdot \hat{i}_\ell = \delta_{k\ell}, \quad \hat{i}^k \cdot \hat{i}^\ell = \delta^{k\ell} \\ \hat{i}_k \times \hat{i}_\ell &= e_{k\ell m} \hat{i}^m, \quad \hat{i}^k \times \hat{i}^\ell = e^{k\ell m} \hat{i}_m \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

hvor  $\delta_k^\ell$  er Kroneckers delta, og  $e_{k\ell m}$  og  $e^{k\ell m}$  er permutationssymboler. Selv om der benyttes ortonormerede basisvektorer, anvendes både øvre og nedre indekser og summationskonventionen træder kun i funktion, når samme bogstav forekommer i et udtryk som både øvre og nedre indeks. Herved bliver det bl.a. muligt at angive en andenordens tensors komponenter på kanonisk form som

$$a_\ell^k = a^k \delta_\ell^k \quad (\text{A.4})$$

hvilket på matrixform kan skrives

$$[a_q^k] = [a^k \delta_q^k] = \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

En anden fordel er, at symbolerne  $\delta_{kl}$  og  $\delta^{kl}$  optræder som identitetstensorens komponenter (metriske tensorer) og ikke som Kroneckers delta kan benyttes som substitutionsoperatorer, hvilket letter oversættelsen fra cartesiske til generelle tensorudtryk.

Som indeksbogstaver i symboler for tensorkomponenter anvendes små og store latinske bogstaver samt små græske bogstaver. Små latinske bogstaver  $k, l, m \dots$  gennemløber værdierne 1, 2 og 3. Store latinske bogstaver står for faste værdier, eksempelvis er

$$a_K^K = a_1^1 \text{ eller } a_2^2 \text{ eller } a_3^3 \quad (\text{A.6})$$

mens

$$a_k^k = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 \quad (\text{A.7})$$

Anvendelse af store bogstaver sætter således summationskonventionen ud af kraft.

Små græske bogstaver benyttet som tensorindeks antager værdierne 1 og 2. Specielt benyttes

$$e_{\alpha\beta} \equiv e_{\alpha\beta 3}, \quad e^{\alpha\beta} \equiv e^{\alpha\beta 3} \quad (\text{A.8})$$

Små græske bogstaver benyttes også som indeks i symboler for størrelser, som ikke er tensorkomponenter, fx invarianter  $I^\gamma$ . I disse tilfælde kan  $\gamma$  antage værdierne 1, 2,  $\dots$  N, hvor N må specificeres i hvert enkelt tilfælde. Også i disse tilfælde gælder summationskonventionen.

Differentiation angives af og til ved et komma

$$(\quad)_{,q} = \partial(\quad)/\partial x^q \quad (\text{A.9})$$

Betydningen af de enkelte symboler skulle fremgå af teksten eller, for visse symbolers vedkommende, af appendix B, C og F.

---

## APPENDIX B. DEFORMATIONSBEKRIVELSE

En partikel i et deformerbart legeme har i den udeformerede tilstand stedvektoren  $\bar{\mathbf{R}}$

$$\bar{\mathbf{R}} = X^k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (\text{B.1})$$

hvor  $\hat{\mathbf{i}}_k$  er ortogonale basisvektorer, se figur B.1. I den deformede tilstand er stedvektoren til den betragtede partikel  $\bar{\mathbf{r}}$

$$\bar{\mathbf{r}} = x^k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (\text{B.2})$$

En grundlæggende antagelse ved deformationsbeskrivelsen er, at en infinitesimal vektor  $d\bar{\mathbf{R}}$ , som forbinder to nabopartikler, under deformationen føres over i en infinitesimal vektor  $d\bar{\mathbf{r}}$ .

---

### B1. Koordinatbeskrivelse

Er deformationen beskrevet ved  $\bar{\mathbf{r}}$  som en funktion af  $\bar{\mathbf{R}}$  og omvendt, dvs.

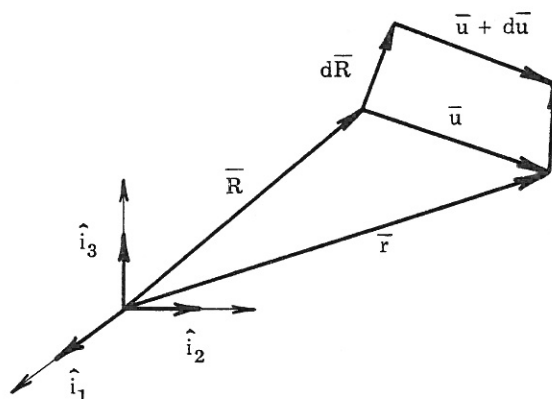
$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^k(X^\ell) \quad \text{og} \quad X^k = X^k(\mathbf{x}^\ell) \quad (\text{B.3})$$

har man

$$d\mathbf{x}^k = (\partial \mathbf{x}^k / \partial X^\ell) dX^\ell = \mathbf{x}^k_{,\ell} dX^\ell \quad (\text{B.4})$$

og

$$dX^k = (\partial X^k / \partial \mathbf{x}^\ell) d\mathbf{x}^\ell = X^k_{,\ell} d\mathbf{x}^\ell \quad (\text{B.5})$$



Figur B.1.

hvor  $x^k_{,\ell}$  og  $X^k_{,\ell}$  kaldes *deformationsgradienter*.

Man har umiddelbart

$$x^k_{,\ell} X^\ell_{,m} = \delta^k_m \quad \text{og} \quad x^k_{,\ell} X^m_{,k} = \delta^m_\ell \quad (\text{B.6})$$

og med betegnelsen  $J$  for funktionaldeterminanten  $\det \underline{x}$  har man

$$\det \underline{x} = J, \quad \det \underline{X} = J^{-1}, \quad e_{rst} J = e_{k\ell m} x^k_{,r} x^\ell_{,s} x^m_{,t} \quad (\text{B.7})$$

Vektoren  $d\bar{R}$  med længden  $dR$  bestemt ved

$$\begin{aligned} dR^2 &= d\bar{R} \cdot d\bar{R} = \delta_{k\ell} dX^k dX^\ell = \\ &= \delta_{k\ell} X^k_{,m} X^\ell_{,n} dx^m dx^n \equiv c_{mn} dx^m dx^n \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

føres under deformationen over i vektoren  $d\bar{r}$  med længden  $dr$  bestemt ved

$$\begin{aligned} dr^2 &= d\bar{r} \cdot d\bar{r} = \delta_{k\ell} dx^k dx^\ell = \\ &= \delta_{k\ell} x^k_{,m} x^\ell_{,n} dX^m dX^n \equiv C_{mn} dX^m dX^n \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

hvor

$$c_{mn} = \delta_{k\ell} X^k_{,m} X^\ell_{,n} \quad (\text{B.10})$$

kaldes *Cauchys deformationstensor*, og

$$C_{mn} = \delta_{k\ell} x^k_{,m} x^\ell_{,n} \quad (\text{B.11})$$

kaldes *Greens deformationstensor*.

Man har

$$\det \underline{C} = J^2 \quad \text{og} \quad \det \underline{c} = J^{-2} \quad (\text{B.12})$$

Idet *Fingers deformationstensor* defineres ved

$$b^{k\ell} = \delta^{mn} x^k_{,m} x^\ell_{,n}, \quad \det \underline{b} = J^2 \quad (\text{B.13})$$

har man

$$b^{k\ell} c_{\ell m} = \delta^k_m \quad (\text{B.14})$$

således, at Cauchys og Fingers deformationstensorer er hinandens inverse.

Tilsvarende er *Piolas deformationstensor*, defineret ved

$$B^{k\ell} = \delta^{mn} X^k_{,m} X^\ell_{,n}, \quad \det \underline{B} = J^{-2} \quad (\text{B.15})$$

den inverse til Greens deformationstensor, idet

$$B^{k\ell} C_{\ell m} = \delta^k_m \quad (\text{B.16})$$

Deformationstensorerne benyttes til bestemmelse af ændringer af længde, areal og volumen. For vektoren  $d\bar{R}$  defineres *strækket*  $\Lambda$  ved

$$\Lambda = dr/dR = (C_{k\ell} dX^k dX^\ell / \delta_{mn} dX^m dX^n)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.17})$$

Idet  $\hat{N}$  er en enhedsvektor med samme retning som  $d\bar{R}$ , har man

$$d\bar{R} = dR \hat{N} = dR N^k \hat{i}_k = dX^k \hat{i}_k \quad \text{og} \quad N^k N_k = 1 \quad (\text{B.18})$$

og strækket i  $\hat{N}$ 's retning kan skrives

$$\Lambda_{(N)} = (C_{k\ell} N^k N^\ell)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.19})$$

Tilsvarende fås

$$\lambda_{(n)} = dR/dr = (c_{k\ell} n^k n^\ell)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.20})$$

hvor  $\hat{n}$  er en enhedsvektor med samme retning som  $d\bar{r}$ .

To vektorer  $d\bar{P}$  og  $d\bar{Q}$  udspænder et parallellogram med arealvektoren

$$d\bar{A} = d\bar{P} \times d\bar{Q} = e_{k\ell m} dP^k dQ^\ell \hat{i}^m = dA_m \hat{i}^m \quad (\text{B.21})$$

De to vektorer føres under deformationen over i  $d\bar{p}$  og  $d\bar{q}$ , som bestemmer arealvektoren

$$\begin{aligned} d\bar{a} &= d\bar{p} \times d\bar{q} = e_{k\ell m} dp^k dq^\ell \hat{i}^m = \\ &= e_{k\ell m} x^k_{,n} x^\ell_{,r} dP^n dQ^r \hat{i}^m = da_m \hat{i}^m \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Af (B.6) og (B.7) fås

$$J e_{kmn} X^k_{,\ell} = e_{\ell rs} x^r_{,m} x^s_{,n} \quad (\text{B.23})$$

som indsat i (B.22) giver Nansons formel

$$da_m = J X^k_{,m} dA_k \quad (\text{B.24})$$

Størrelsen af  $d\bar{a}$  bliver bestemt ved

$$\begin{aligned} da^2 &= da_m da^m = J^2 X^k_{,m} X^\ell_{,n} \delta^{mn} dA_k dA_\ell \\ &= J^2 B^{k\ell} dA_k dA_\ell \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Med

$$d\bar{A} = dA \hat{N} = dA N_k \hat{i}^k = dA_k \hat{i}^k \quad (\text{B.26})$$

fås

$$da/da = J (B^{k\ell} N_k N_\ell)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.27})$$

som udtryk for ændringen af et arealelement med normalen  $\hat{N}$ . Tilsvarende fås

$$dA/da = J^{-1} (b^{k\ell} n_k n_\ell)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.28})$$



Tre vektorer  $d\bar{P}$ ,  $d\bar{Q}$  og  $d\bar{R}$  udspænder et parallellepipedum med volumenet

$$dV = [d\bar{P}d\bar{Q}d\bar{R}] = e_{k\ell m} dP^k dQ^\ell dR^m \quad (B.29)$$

De tre vektorer føres under deformationen over i  $d\bar{p}$ ,  $d\bar{q}$  og  $d\bar{r}$ , som udspænder volumenet

$$\begin{aligned} dv &= [d\bar{p}d\bar{q}d\bar{r}] = e_{k\ell m} dp^k dq^\ell dr^m = \\ &= e_{k\ell m} x^k_{,r} x^\ell_{,s} x^m_{,t} dP^r dQ^s dR^t = \\ &= J e_{rst} dP^r dQ^s dR^t = J dV \end{aligned} \quad (B.30)$$

dvs. volumenforholdet bliver

$$dv/dV = J \quad (B.31)$$

Andre mål for længdeændringen er

$$\begin{aligned} dr^2 - dR^2 &= (C_{k\ell} - \delta_{k\ell}) dX^k dX^\ell = 2E_{k\ell} dX^k dX^\ell = \\ &= (\delta_{k\ell} - c_{k\ell}) dx^k dx^\ell = 2e_{k\ell} dx^k dx^\ell \end{aligned} \quad (B.32)$$

hvor

$$E_{k\ell} = \frac{1}{2} (C_{k\ell} - \delta_{k\ell}) \quad (B.33)$$

kaldes *Lagranges tøjningstensor*, og

$$e_{k\ell} = \frac{1}{2} (\delta_{k\ell} - c_{k\ell}) \quad (B.34)$$

kaldes *Eulers tøjningstensor*.

*Længdetøjningen* eller den relative forlængelse  $\epsilon_{(N)}$  i en retning givet ved enhedsvektoren  $\hat{N}$  defineres ved

$$\epsilon_{(N)} = (dr - dR)/dR = \Lambda_{(N)} - 1 \quad (B.35)$$

Idet  $\theta_{(PQ)}$  er vinklen mellem to vektorer  $d\bar{P}$  og  $d\bar{Q}$ , som under deformationen føres over i  $d\bar{p}$  og  $d\bar{q}$ , og  $\vartheta_{(pq)}$  betegner vinklen mellem  $d\bar{p}$  og  $d\bar{q}$ , defineres vinkelændringen  $\varphi_{(PQ)}$  ved

$$\varphi_{(PQ)} = \theta_{(PQ)} - \vartheta_{(pq)} \quad (B.36)$$

hvor  $\theta_{(PQ)}$  bestemmes ved

$$\cos \theta_{(PQ)} = \hat{P} \cdot \hat{Q} = P^k Q_k \quad (B.37)$$

og  $\vartheta_{(pq)}$  ved

$$\begin{aligned}
\cos\vartheta_{(pq)} &= \hat{p} \cdot \hat{q} = dp^k dq_k / (dp dq) \\
&= C_{k\ell} P^k Q^\ell / (C_{mn} C_{rs} P^m P^n Q^r Q^s)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_{k\ell} P^k Q^\ell / \Lambda_{(P)} \Lambda_{(Q)} = \cos(\theta_{(PQ)} - \varphi_{(PQ)})
\end{aligned} \tag{B.38}$$

hvor  $\hat{P}$  og  $\hat{Q}$  er enhedsvektorer i  $d\bar{P}$ 's og  $d\bar{Q}$ 's retninger.

## B2. Flytningsbeskrivelse

Indføres flytningsvektoren  $\bar{u}$  ved

$$\bar{u} = \bar{r} - \bar{R}, \quad u^k = x^k - X^k \tag{B.39}$$

har man deformationsgradienterne

$$x^k_{,\ell} = u^k_{,\ell} + \delta^k_\ell \quad \text{og} \quad X^k_{,\ell} = \delta^k_\ell - u^k_{,\ell} \tag{B.40}$$

deformationstensorerne

$$\begin{aligned}
C_{k\ell} &= \delta_{k\ell} + u_{k,\ell} + u_{\ell,k} + \delta^{mn} u_{m,\ell} u_{n,k} \\
c_{k\ell} &= \delta_{k\ell} - u_{k,\ell} - u_{\ell,k} + \delta^{mn} u_{m,\ell} u_{n,k} \\
B^{k\ell} &= \delta^{k\ell} + \delta^{kn} u^\ell_{,n} + \delta^{\ell n} u^k_{,n} + \delta^{mn} u^k_{,m} u^\ell_{,n} \\
b^{k\ell} &= \delta^{k\ell} - \delta^{kn} u^\ell_{,n} - \delta^{\ell n} u^k_{,n} + \delta^{mn} u^k_{,m} u^\ell_{,n}
\end{aligned} \tag{B.41}$$

og tøjningstensorerne

$$\begin{aligned}
E_{k\ell} &= \frac{1}{2} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k} + \delta^{mn} u_{m,\ell} u_{n,k}) \\
e_{k\ell} &= \frac{1}{2} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k} - \delta^{mn} u_{m,\ell} u_{n,k})
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Størrelserne  $u^k_{,\ell}$  og  $u_{k,\ell} = \delta_{mk} u^m_{,\ell}$  kaldes *flytningsgradienter*.

## B3. Infinitesimale deformationer, kompatibilitet

Ved en infinitesimal deformation forstås her en deformation med så små flytningsgradienter, at man i (B.41) og (B.42) kan se bort fra produktledet  $\delta^{mn} u_{m,\ell} u_{n,k}$  og fx benytte den *lineære* eller *infinitesimale tøjningstensor*  $\epsilon_{k\ell}$  defineret ved

$$\epsilon_{k\ell} = \frac{1}{2} (u_{k,\ell} + u_{\ell,k}) \tag{B.43}$$

Strækket  $\Lambda_{(N)}$  bliver i denne teori

$$\Lambda_{(N)} \cong (1 + 2\epsilon_{k\ell} N^k N^\ell)^{\frac{1}{2}} \cong 1 + \epsilon_{k\ell} N^k N^\ell \tag{B.44}$$

og man har længdetøjningen

$$\epsilon_{(N)} = \epsilon_{kl} N^k N^l \quad (\text{B.45})$$

I udtrykket (B.38) for vinkelændringen kan man regne nævneren  $\Lambda_{(P)} \Lambda_{(Q)} = 1$  og får således

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{(PQ)} - \varphi_{(PQ)}) &\cong \cos\theta_{(PQ)} + \varphi_{(PQ)} \sin\theta_{(PQ)} \cong \\ &\cong P^k Q_k + 2\epsilon_{kl} P^k Q^l \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

eller

$$\varphi_{(PQ)} \sin\theta_{(PQ)} \cong 2\epsilon_{kl} P^k Q^l \quad (\text{B.47})$$

Står specielt  $\hat{P}$  og  $\hat{Q}$  vinkelret på hinanden, er  $\sin\theta_{(PQ)} = 1$  og

$$\varphi_{(PQ)} \cong 2\epsilon_{kl} P^k Q^l \quad (\text{B.48})$$

Skal man ud fra kendskab til tøjningerne  $\epsilon_{kl}$  bestemme flytningerne  $u_k$  ved hjælp af (B.43), må tøjningerne opfylde visse integrabilitetsbetingelser. Differenteres (B.43) med hensyn til  $x^m$  og  $x^n$ , fås

$$\epsilon_{kl,mn} = \frac{1}{2} (u_{k,lmn} + u_{l,kmn}) \quad (\text{B.49})$$

og multipliceres med  $e^{kmr} e^{lms}$ , har man inkompatibilitetstensoren  $S^{rs}$

$$S^{rs} = e^{kmr} e^{lms} \epsilon_{kl,mn} \quad (\text{B.50})$$

Da  $u_{k,lmn} = u_{k,nml}$  og  $e^{lms} = -e^{nls}$  er

$$S^{rs} = 0 \quad (\text{B.51})$$

når tøjningerne bestemmes af flytningerne ved (B.43).

Ligningerne

$$S^{rs} = e^{kmr} e^{lms} \epsilon_{kl,mn} = 0 \quad (\text{B.52})$$

kaldes *Saint-Venants kompatibilitetsbetingelser* efter Saint-Venant [1864.01]. Som de er udledt her, er de nødvendige betingelser. Cesaro [06.01] viste, at tøjninger, som tilfredsstiller (B.52) på nær en infinitesimal stivlegemebevægelse entydigt bestemmer flytningerne af et enkeltssammenhængende område.

Da  $S^{kl} = S^{lk}$  er der 6 kompatibilitetsbetingelser. Disse er imidlertid ikke uafhængige, idet man kan vise, at der for  $S^{kl}$  defineret ved (B.50) gælder 3 Bianchi identiteter

$$S^{kl}_{,l} = 0 \quad (\text{B.53})$$

Washizu [57.06] har vist, at såfremt

$$S^{kl} = 0 \quad \text{på overfladen } A \text{ for alle } k \text{ og } l \quad (\text{B.54})$$

da vil

$$S^{k\ell} = 0 \quad \text{i volumenet } V \text{ for } k = \ell \quad (\text{B.55})$$

medføre

$$S^{k\ell} = 0 \quad \text{i } V \text{ for } k \neq \ell \quad (\text{B.56})$$

og omvendt.

Kompatibilitetsbetingelserne i det ikke-lineære tilfælde er behandlet af bl.a. Truesdell & Toupin [60.01] og Fosdick [66.09].

#### B4. Deformationshastigheder

Under deformationen bevæger en partikel med stedvektoren  $\bar{\mathbf{r}} = x^k \hat{\mathbf{i}}_k$  sig med hastigheden

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} = v^k \hat{\mathbf{i}}_k = \dot{x}^k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (\text{B.57})$$

og accelerationen

$$\bar{\mathbf{a}} = \dot{\bar{\mathbf{v}}} = a^k \hat{\mathbf{i}}_k = \ddot{x}^k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (\text{B.58})$$

hvor  $x^k = x^k(X^\ell, t)$  og  $\dot{x}^k = dx^k/dt$ , idet  $X^\ell$  er konstanter for den betragtede partikel.

Som mål for den hastighed, hvormed deformationsstørrelserne ændrer sig, benyttes *deformationshastighedstensoren*

$$\begin{aligned} D_{k\ell} &\equiv \dot{E}_{k\ell} = \frac{1}{2} \dot{C}_{k\ell} = \frac{1}{2} \delta_{mn} (\dot{x}^m_{,k} x^n_{,\ell} + x^m_{,k} \dot{x}^n_{,\ell}) \\ &= \frac{1}{2} ((\partial v_n / \partial X^k) (\partial x^n / \partial X^\ell) + (\partial x^m / \partial X^k) (\partial v_m / \partial X^\ell)) \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Et andet mål er *tøjningshastighedstensoren*

$$d_{k\ell} \equiv \frac{1}{2} (\partial v_k / \partial x^\ell + \partial v_\ell / \partial x^k) \quad (\text{B.60})$$

Sammenholdes (B.60) med (B.39 og (B.43) ses det, at

$$d_{k\ell} = \dot{\epsilon}_{k\ell} \quad (\text{B.61})$$

Af definitionerne fremgår, at de to tensorer  $\underline{D}$  og  $\underline{d}$  begge er symmetriske. Med

$$\partial v_k / \partial X^\ell = (\partial v_k / \partial x^m) x^m_{,\ell} \quad (\text{B.62})$$

ses, at

$$D_{k\ell} = x^m_{,k} x^n_{,\ell} d_{mn} \quad (\text{B.63})$$

---

APPENDIX C. BEVÆGELSESLIGNINGER

Et tetraeder udspændes af vektorerne  $d\bar{q}_1$ ,  $d\bar{q}_2$  og  $d\bar{q}_3$ , se figur C.1. De udadgående normaler til de 3 sideflader, som udspændes af  $d\bar{q}_k$ , betegnes  $\hat{\ell}_k$ , og man har arealvektorerne

$$\begin{aligned} d\bar{a}^1 &= da^1 \hat{\ell}_1 = \frac{1}{2} d\bar{q}_3 \times d\bar{q}_2 \\ d\bar{a}^2 &= da^2 \hat{\ell}_2 = \frac{1}{2} d\bar{q}_1 \times d\bar{q}_3 \\ d\bar{a}^3 &= da^3 \hat{\ell}_3 = \frac{1}{2} d\bar{q}_2 \times d\bar{q}_1 \end{aligned} \quad (C.1)$$

Normalen til den fjerde sideflade betegnes  $\hat{n}$ , og man har arealvektoren

$$d\bar{a} = da \hat{n} = \frac{1}{2} (d\bar{q}_3 - d\bar{q}_2) \times (d\bar{q}_1 - d\bar{q}_2) = -da^k \hat{\ell}_k \quad (C.2)$$

I det følgende benyttes specielt  $\hat{\ell}_k = \hat{i}_k$ , og (C.2) medfører

$$\begin{aligned} da &= -n^k da_k = -n_k da^k \\ da^k &= -n^k da, \quad da_k = -n_k da \end{aligned} \quad (C.3)$$

Elementets volumen udtrykkes som

$$dv = \frac{1}{3} dnda \quad (C.4)$$

Til et referencetidspunkt betegnes tilsvarende størrelser med store bogstaver. Elementets masse er til ethvert tidspunkt

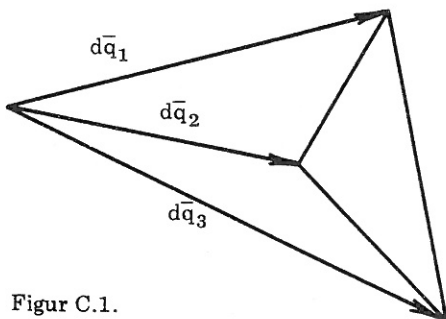
$$dm = \rho dv = \rho_0 dV \quad (C.5)$$

hvor  $\rho$  er massefylden,  $\rho_0$  specielt til referencetidspunktet.

På elementet virker et massekraft  $d\bar{F}$  og overfladekræfterne  $d\bar{P}_{(k)}$  og  $d\bar{P}_{(n)}$ . Elementet regnes ikke påvirket af momenter. Newtons 2. lov udtrykkes ved

$$d\bar{F} + d\bar{P}_{(n)} + \sum d\bar{P}_{(k)} = \bar{a} dm = \rho \bar{a} dv \quad (C.6)$$

hvor  $\bar{a}$  er accelerationsvektoren.



Figur C.1.

### C.1. Spændingsvektorer

Massekraften udtrykkes som

$$d\bar{F} = \bar{f} dm = \rho \bar{f} dv \quad (C.7)$$

Overfladekraften på et arealelement antages proportionalt med arealet, og man kan skrive

$$\begin{aligned} d\bar{P}_{(L)} &= \bar{p}^L da_L \\ d\bar{P}_{(n)} &= \bar{p}_{(n)} da \end{aligned} \quad (C.8)$$

som indsat i (C.6) giver

$$\rho \bar{f} dv + \bar{p}_{(n)} da + \bar{p}^k da_k = \rho \bar{a} dv \quad (C.9)$$

$\bar{p}$ 'erne kaldes *Cauchy spændingsvektorer*. Ved anvendelse af (C.3) og (C.4) kan (C.9) skrives

$$\frac{1}{3} \rho \bar{f} dn + \bar{p}_{(n)} - \bar{p}^k n_k = \frac{1}{3} \rho \bar{a} dn \quad (C.10)$$

som for  $dn \rightarrow 0$  giver

$$\bar{p}_{(n)} = \bar{p}^k n_k \quad (C.11)$$

dvs. spændingsvektoren på en flade gennem et punkt er bestemt ved normalen til fladen og spændingsvektorerne på koordinatfladerne gennem punktet.

Det kan i visse tilfælde være bekvemt at sætte kraften på arealelementet med arealet da i relation til arealet til referencetidspunktet og skrive

$$\begin{aligned} d\bar{P}_{(L)} &= \bar{t}^L dA_L \\ d\bar{P}_{(n)} &= \bar{t}_{(n)} dA \end{aligned} \quad (C.12)$$

hvor  $\bar{t}$ 'erne kaldes *Piola-Kirchhoff spændingsvektorer*. Indsættes i (C.6) finder man, idet (C.5) benyttes

$$\bar{t}_{(n)} = \bar{t}^k N_k \quad (C.13)$$

Man har således

$$\bar{p}^k n_k da = \bar{t}^q N_q dA \quad (C.14)$$

eller

$$\bar{p}^k da_k = \bar{t}^q dA_q \quad (C.15)$$

Benyttes (B.24) har man

$$\bar{t}^q = J X_{,k}^q \bar{p}^k \quad (C.16)$$

og, ved multiplikation med  $J^{-1} \mathbf{x}_{,l}^n$

$$\bar{\mathbf{p}}^n = J^{-1} \mathbf{x}_{,l}^n \bar{t}^l \quad (\text{C.17})$$

For et legeme med volumen  $v$  og overflade  $a$  kan projektionsligningen skrives

$$\int_v \rho \bar{\mathbf{f}} dv + \int_a \bar{\mathbf{p}}^k n_k da = \int_v \rho \bar{\mathbf{a}} dv \quad (\text{C.18})$$

og ved anvendelse af Gauss' sætning fås

$$\int_v (\partial \bar{\mathbf{p}}^k / \partial \mathbf{x}^k + \rho \bar{\mathbf{f}}) dv = \int_v \rho \bar{\mathbf{a}} dv \quad (\text{C.19})$$

som, da den skal gælde for ethvert dellegeme, giver

$$\partial \bar{\mathbf{p}}^k / \partial \mathbf{x}^k + \rho \bar{\mathbf{f}} = \rho \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{C.20})$$

Tilsvarende er momentligningen

$$\int_v \bar{\mathbf{r}} \times \rho \bar{\mathbf{f}} dv + \int_a \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{p}}^k n_k da = \int_v \bar{\mathbf{r}} \times \rho \bar{\mathbf{a}} dv \quad (\text{C.21})$$

hvor  $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{x}^l \hat{\mathbf{i}}_l$  er stedvektoren til den betragtede partikel. Momentligningen omformes til

$$\int_v (\bar{\mathbf{r}} \times \rho \bar{\mathbf{f}} + (\partial \bar{\mathbf{r}} / \partial \mathbf{x}^k) \times \bar{\mathbf{p}}^k + \bar{\mathbf{r}} \times (\partial \bar{\mathbf{p}}^k / \partial \mathbf{x}^k)) dv = \int_v \bar{\mathbf{r}} \times \rho \bar{\mathbf{a}} dv \quad (\text{C.22})$$

som sammen med (C.20) og

$$\partial \bar{\mathbf{r}} / \partial \mathbf{x}^k = \hat{\mathbf{i}}_k \quad (\text{C.23})$$

giver

$$\hat{\mathbf{i}}_k \times \bar{\mathbf{p}}^k = \bar{\mathbf{0}} \quad (\text{C.24})$$

Indsættes (C.17) og

$$\rho = J^{-1} \rho_0 \quad (\text{C.25})$$

som fremgår af (C.5) og (B.31), i (C.20) og (C.24), fås

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,l}^k (\partial \bar{t}^l / \partial \mathbf{x}^k) + \rho_0 \bar{\mathbf{f}} &= \rho_0 \bar{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{i}}_k \times \mathbf{x}_{,l}^k \bar{t}^l &= \bar{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

idet

$$\partial (J^{-1} \mathbf{x}_{,p}^k) / \partial \mathbf{x}^k = \frac{1}{2} \partial (e^{k\ell m} e_{pqr} \mathbf{X}_{,l}^q \mathbf{X}_{,m}^r) / \partial \mathbf{x}^k = 0 \quad (\text{C.27})$$

Med

$$\partial \bar{t}^{\ell} / \partial x^k = (\partial \bar{t}^{\ell} / \partial X^m) X_{,k}^m \quad (C.28)$$

kan (C.26) skrives

$$\begin{aligned} \partial \bar{t}^m / \partial X^m + \rho_0 \bar{f} &= \rho_0 \bar{a} \\ \hat{i}_k \times x_{,\ell}^k \bar{t}^{\ell} &= \bar{0} \end{aligned} \quad (C.29)$$

---

## C.2. Spændingstensorer

Cauchy spændingsvektorenes komponenter efter basisvektorerne  $\hat{i}_\ell$  indføres ved

$$\bar{p}^k = \sigma^{k\ell} \hat{i}_\ell \quad (C.30)$$

og er hermed komponenterne af en andenordens tensor, som kaldes *Cauchy spændingstensen*

$$\bar{\sigma} = \sigma^{k\ell} \hat{i}_\ell \hat{i}_k \quad (C.31)$$

Spændingsvektoren på en flade med normalen  $\hat{n}$  udtrykkes i henhold til (C.11) som

$$\bar{p}_{(n)} = \bar{\sigma} \cdot \hat{n} \quad (C.32)$$

og kraftvektoren på et fladeelement med arealet da som

$$d\bar{P}_{(n)} = \bar{\sigma} \cdot \hat{n} da = \bar{\sigma} \cdot d\bar{a} \quad (C.33)$$

Indsættes (C.30) i (C.20) og (C.24) og multipliceres skalært med henholdsvis  $\hat{i}^m$  og  $\hat{i}_m$ , fås

$$\begin{aligned} \partial \sigma^{km} / \partial x^k + \rho f^m &= \rho a^m \\ e_{k\ell m} \sigma^{k\ell} &= 0 \iff \sigma^{k\ell} = \sigma^{\ell k} \end{aligned} \quad (C.34)$$

Heraf fremgår, at Cauchy spændingstensen er symmetrisk  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^T$ .

Tilsvarende indføres Piola-Kirchhoff spændingsvektorenes komponenter efter basisvektorerne  $\hat{i}_\ell$  ved

$$\bar{t}^k = T^{k\ell} \hat{i}_\ell \quad (C.35)$$

De er således komponenterne af en andenordens tensor, som kaldes *den første Piola-Kirchhoff spændingstensor*

$$\bar{\pi} = T^{k\ell} \hat{i}_\ell \hat{i}_k \quad (C.36)$$

Ifølge (C.13) og (C.12) er spændingsvektoren på en flade med normalen  $\hat{n}$

$$\bar{t}_{(n)} = \bar{\pi} \cdot \hat{N} \quad (C.37)$$



og kraftvektoren på fladeelementet med arealet da

$$d\bar{P}_{(n)} = \bar{\pi} \cdot \hat{N} dA = \bar{\pi} \cdot d\bar{A} \quad (C.38)$$

Indsættes (C.35) i (C.29) fås

$$\begin{aligned} \partial T^{km} / \partial X^k + \rho_0 f^m &= \rho_0 a^m \\ e_{k\ell m} x_{,n}^k T^{n\ell} &= 0 \iff x_{,n}^k T^{n\ell} = x_{,n}^\ell T^{nk} \end{aligned} \quad (C.39)$$

som viser, at denne tensor ikke er symmetrisk.

Ved anvendelse af bevægelsesligninger vil det være en fordel at arbejde med en symmetrisk spændingstensor og et sæt parametre (koordinater, massefylde, normaler og arealer) som svarer til referencetilstanden. Ingen af ligningssættene (C.34) og (C.39) opfylder begge krav. Defineres *den anden Piola-Kirchhoff spændingstensor* ved

$$\bar{P} = \bar{X} \cdot \bar{\pi} = X_{,m}^k T^{\ell m} \hat{i}_k \hat{i}_\ell \quad (C.40)$$

har man på komponentform

$$P^{k\ell} = X_{,m}^k T^{\ell m} = J X_{,m}^k X_{,n}^\ell \sigma^{nm} \quad (C.41)$$

som viser, at denne tensor er symmetrisk. Med

$$T^{km} = x_{,\ell}^m P^{\ell k} \quad (C.42)$$

bliver bevægelsesligningerne

$$\begin{aligned} \partial (x_{,\ell}^m P^{\ell k}) / \partial X^k + \rho_0 f^m &= \rho_0 a^m \\ P^{k\ell} &= P^{\ell k} \end{aligned} \quad (C.43)$$

Sammenhængen mellem de tre spændingstensorers komponenter er givet ved

$$\begin{aligned} \sigma^{k\ell} &= J^{-1} X_{,m}^k T^{m\ell} = J^{-1} x_{,m}^k x_{,n}^\ell P^{nm} \\ T^{k\ell} &= x_{,n}^\ell P^{nk} = J X_{,m}^k \sigma^{m\ell} \\ P^{k\ell} &= J X_{,m}^k X_{,n}^\ell \sigma^{nm} = X_{,m}^k T^{\ell m} \end{aligned} \quad (C.44)$$

### C.3. Spændingsfunktioner

I det statiske tilfælde har man  $\bar{a} = \bar{0}$  og dermed ligevægtsligningerne

$$\sigma_{,k}^{k\ell} + \rho f^\ell = 0 \quad (C.45)$$

hvor  $\sigma^{k\ell} = \sigma^{\ell k}$  og  $\partial(\ ) / \partial x^k = (\ )_{,k}$ . En partikulær løsning til (C.45) er det i reglen forholdsvis let at bestemme, se fx Truesdell [59.04], og det egentlige problem i denne forbindelse er at finde løsninger til

$$\sigma_{,k}^{k\ell} = 0 \quad (C.46)$$

med tilhørende randbetingelser. En fremgangsmåde som ofte, og især når randbetingelserne udelukkende er udtrykt ved spændinger, vil føre til løsninger, består i at indføre en symmetrisk spændingsfunktionstensor

$$\varphi_{pq} = \varphi_{qp} \quad (C.47)$$

og udtrykke spændingerne som

$$\sigma^{k\ell} = e^{kpr} e^{\ell qs} \varphi_{pq,rs} \quad (C.48)$$

Herved er ligevægtsligningerne (C.46) identisk opfyldt. Spændingsfunktionerne skal bestemmes, så randbetingelserne tilfredsstilles, og yderligere således, at løsningen gælder for et materiale med en given konstitutiv ligning. Udtrykkes tøjningerne ved spændingerne og indsættes spændingerne fra (C.48) i kompatibilitetsbetingelserne fås et sæt ligninger, som  $\varphi_{pq}$  skal opfylde. Nogle eksempler er givet i appendix F.

#### C.4. Effekt

De ydre kræfters effekt  $E_y$  (arbejde pr. tidsenhed) kan skrives

$$E_y = \int_V \rho \bar{f} \cdot \bar{v} dv + \int_A \bar{p} \cdot \bar{v} da = \int_V \rho f^\ell v_\ell dv + \int_A \sigma^{k\ell} n_k v_\ell da \quad (C.49)$$

Ved anvendelse af Gauss' sætning og bevægelsesligningerne (C.34) finder man

$$E_y = \dot{E}_k + E_i \quad (C.50)$$

hvor den kinetiske energi  $E_k$  er

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho v_\ell v^\ell dv \quad (C.51)$$

og de indre kræfters effekt  $E_i$  er

$$E_i = \int_V \sigma^{k\ell} (\partial v_\ell / \partial x^k) dv = \int_V \sigma^{k\ell} d_{\ell k} dv \quad (C.52)$$

Skriver man i stedet  $E_y$  som

$$E_y = \int_V \rho_0 \bar{f} \cdot \bar{v} dV + \int_A \bar{t} \cdot \bar{v} dA = \int_V \rho_0 f^\ell v_\ell dV + \int_A T^{k\ell} N_k v_\ell dA \quad (C.53)$$

finder man tilsvarende, idet dog bevægelsesligningerne (C.39) benyttes

$$E_y = \dot{E}_k + E_i \quad (C.54)$$

hvor den kinetiske energi udtrykkes som

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho_0 v_\ell v^\ell dV \quad (C.55)$$

mens de indre kræfters effekt er

$$E_i = \int_V T^{k\ell} (\partial v_\ell / \partial X^k) dV = \int_V T^{k\ell} (\partial v_\ell / \partial x^m) x_{,k}^m dV \quad (C.56)$$

Indføres den anden Piola-Kirchhoff spændingstensor i (C.56) får man, se (B.63)

$$\begin{aligned} E_i &= \int_V P^{nk} x_{,n}^\ell x_{,k}^m (\partial v_\ell / \partial x^m) dV = \int_V P^{nk} x_{,n}^\ell x_{,k}^m d_{\ell m} dV \\ &= \int_V P^{nk} D_{nk} dV \end{aligned} \quad (C.57)$$

Antager man, at et materiale har en indre energi  $U$ , og at summen af tilvæksterne i indre og kinetisk energi er lig med summen af tilført energi i det betragtede tidsinterval, har man

$$\dot{E}_k + \dot{U} = E_y + \dot{Q} \quad (C.58)$$

hvor  $Q$  er andre former for energi end den mekaniske indeholdt i  $E_y$ , fx varmeenergi. Med

$$U = \int_V \rho_0 W dV \quad (C.59)$$

og under anvendelse af (C.54) har man

$$\int_V \rho_0 (\partial W / \partial t) dV = \int_V P^{nk} D_{nk} dV + \dot{Q} \quad (C.60)$$

Antages yderligere, at man har materialer, som kan undergå deformationsprocesser i hvilke der ikke optræder andre energiformer end den omtalte mekaniske, kan (C.60) for et volumenelement skrives

$$\rho_0 (\partial W / \partial t) = P^{nk} (\partial E_{nk} / \partial t) \quad (C.61)$$

idet (B.59) er benyttet. For sådanne materialer har man derfor

$$P^{k\ell} = \rho_0 \partial W / \partial E_{k\ell} \quad (C.62)$$

eller, med den lineære sammenhæng mellem  $E_{k\ell}$  og  $C_{k\ell}$

$$P^{k\ell} = 2\rho_0 \partial W / \partial C_{k\ell} \quad (C.63)$$

Størrelsen  $W$  kaldes tøjningsenergifunktionen, og materialer med en konstitutiv ligning som (C.63) kaldes Green-elastiske eller hyperelastiske.

---

## APPENDIX D. INDRE BINDINGER

Mekanikkens bevægelsesligninger opstilles sædvanligvis på en sådan form, at de gælder for ethvert materiale. For at kunne løses må de derfor suppleres med ligninger, som beskriver materialets opførsel, de konstitutive ligninger.

I kontinuummeknikken vil de konstitutive ligninger bestå af relationer mellem på den ene side de størrelser, som beskriver legemets deformation, dvs. deformationstensoren og dens tidsafledede og på den anden side de størrelser, som beskriver spændingstilstanden, dvs. spændingstensoren og dens tidsafledede. Andre parametre som fx temperaturen kan indgå i de konstitutive ligninger, dette er ikke behandlet i det følgende.

I et materiale uden indre bindinger har en symmetrisk deformationstensor 6 af hinanden uafhængige komponenter, ligesom en symmetrisk spændingstensor har 6 af hinanden uafhængige komponenter. For et materiale med indre geometriske bindinger, vil der mellem deformationstensorens komponenter eksistere en eller flere, højst 6, relationer. Tilsvarende vil der for et materiale med indre statiske bindinger eksistere en eller flere relationer, igen højst 6, mellem spændingstensorens komponenter.

Tilstedeværelse af indre bindinger har betydning ved opstilling af konstitutive ligninger for typer af materialer og medfører i visse tilfælde ret store lettelser i arbejdet med at løse problemer, som involverer sådanne materialer. Man vil derfor ofte benytte en antagelse om eksistensen af en eller flere indre bindinger for at skaffe simple, tilnærmede løsninger.

---

### D.1 Geometriske bindinger

Til belysning af konsekvenserne af indre geometriske bindinger betragtes et Green-elastisk materiale med tøjningsenergifunktionen  $W$ . Materialets konstitutive ligning er

$$P^{k\ell} = 2\rho_0 \partial W / \partial C_{k\ell} \quad (D.1)$$

hvor  $P^{k\ell}$  er Piola-Kirchhoffs spændingstensor,  $C_{k\ell}$  er Greens deformationstensor,  $\rho$  er massetætheden og  $W$  er en funktion af deformationstensorens komponenter. Lad en geometrisk binding være givet ved relationen

$$f(C_{11}, C_{12}, \dots, C_{33}) = K \quad (D.2)$$

hvor  $K$  er en konstant. For at tage hensyn til denne binding dannes funktionen

$$F = W + S(f - K) \quad (D.3)$$

hvor  $S$  optræder som en Lagrangefaktor. Under hensyn til bindingen (D.2) bestemmes spændingen ved

$$P^{k\ell} = 2\rho_0 \partial F / \partial C_{k\ell} \quad (D.4)$$

og det ses, at der optræder nogle ubestemtheder i form af led med faktoren  $S$ . Ved at opskrive tilvæksten i arbejdet under en deformationsproces, som tilfredsstiller den geometriske binding

$$2\rho_0 dW = P^{k\ell} dC_{k\ell} = (\partial F / \partial C_{k\ell}) dC_{k\ell} = (\partial W / \partial C_{k\ell} + S \partial (F - K) / \partial C_{k\ell}) dC_{k\ell} \quad (D.5)$$

ses det yderligere, at det samlede bidrag, som disse ubestemte spændinger yder til arbejdet, er lig nul.

De ubestemte led betegnes ofte som *reaktionsspændinger*, idet de optræder som reaktioner til de geometriske bindinger.

Som eksempler på materialer med indre geometriske bindinger, skal omtales stive materialer, usammentrykkelige materialer, som deformeres under volumenkonstans og materialer, som i ethvert punkt har en retning, i hvilken længdetøjningen er nul.

*Stive materialer.* Når et legeme bevæger sig som et stift legeme, kaldes det materiale, som legemet består af, for et stift materiale. Alle tøjningstensorens komponenter er nul og alle spændingstensorens komponenter er ubestemte.

*Usammentrykkelige materialer.* Et legemes deformation kan i et cartesisk koordinatsystem beskrives ved koordinaterne  $x^k$  til en partikel i den deformerede tilstand udtrykt som funktion af koordinaterne  $X^{\ell}$  til den samme partikel i den udeformerede tilstand og tiden  $t$ , dvs.

$$x^k = x^k(X^{\ell}, t) \quad (D.6)$$

Volumenændringen af et infinitesimalt element er da givet ved

$$dv = J dV \quad (D.7)$$

hvor  $J$  er Jacobis funktionaldeterminant

$$J = \det(\partial x^k / \partial X^{\ell}) = |x_{,\ell}^k| \quad (D.8)$$

Volumenkonstans kan nu udtrykkes ved

$$J = 1 \quad (D.9)$$

Benyttes at volumenelementets masse er konstant under deformationen, kan volumenkonstans udtrykkes ved

$$\rho(X^{\ell}, t) = \rho_0(X^{\ell}) \quad \text{eller} \quad d\rho(X^{\ell}, t)/dt = 0 \quad (D.10)$$

hvor  $\rho(X^{\ell}, t)$  er massetætheden i deformeret tilstand og  $\rho_0(X^{\ell})$  er massetætheden i udeformeret tilstand.

For at belyse denne bindings indflydelse på spændingstensoren betragtes et isotropt Green-elastisk materiale. For et sådant materiale kan tøjningsenergifunktionen  $W$  angives som en funktion af hovedinvarianterne hørende til deformationstensoren

$$W = W(I_C, II_C, III_C) \quad (D.11)$$

Da  $\det C_{KL} = (\det x_{,A}^k)^2$  udtrykkes den geometriske binding ved

$$III_C = 1 \quad (D.12)$$

og  $W$  er kun en funktion af de to invarianter, dvs.

$$W = W(I_C, II_C) \quad (D.13)$$

Spændingerne bestemmes under hensyn til bindingen ud fra funktionen

$$F = W(I_C, II_C) + \lambda(III_C - 1) \quad (D.14)$$

Til vurdering af betydningen af det sidste led i (D.14) har man, idet

$$III_C = \frac{1}{6} e^{k\ell m} e^{npq} C_{kn} C_{\ell p} C_{mq} \quad (D.15)$$

at

$$\partial III_C / \partial C_{k\ell} = III_C B^{k\ell} \quad (D.16)$$

hvor  $B^{k\ell}$  er Piolas deformationstensor. Herved bliver

$$p^{k\ell} = 2\rho_0 \left( \frac{\partial W}{\partial C_{k\ell}} + \lambda III_C B^{k\ell} \right) \quad (D.17)$$

Med Cauchys spændingstensor  $\sigma^{k\ell}$  bestemt ved

$$\sigma^{k\ell} = J^{-1} x_{,m}^k x_{,n}^{\ell} p^{mn} \quad (D.18)$$

og Piolas deformationstensor ved

$$B^{k\ell} = X_{,m}^k X_{,n}^{\ell} \delta^{mn} \quad (D.19)$$

er

$$\sigma^{k\ell} = 2\rho_0 x_{,m}^k x_{,n}^{\ell} \frac{\partial W}{\partial C_{mn}} + p \delta^{k\ell} \quad (D.20)$$

hvorved

$$p = 2\rho_0 \lambda III_C = 2\rho_0 \lambda \quad (D.21)$$

er et ubestemt hydrostatisk tryk.

*Materiale med ustrækkelig retning.* Lad en retning i et punkt være givet ved enhedsvektoren  $\hat{A}$  og lad  $d\bar{A}$  være givet ved

$$d\bar{A} = dA \hat{A} \quad (D.22)$$

Vektoren  $d\bar{A}$  føres under deformationen over i  $d\bar{a}$ , hvor

$$d\bar{a} = da \hat{a} \quad (D.23)$$

og  $\hat{a}$  angiver den retning, som  $\hat{A}$  føres over i. Strækket  $\Lambda_{(N)}$  bestemmes ved

$$\Lambda_{(N)} = da/dA = (C_{k\ell} A^k A^{\ell})^{\frac{1}{2}} \quad (D.24)$$

Såfremt retningen er ustrækkelig, er

$$da = dA \Rightarrow \Lambda_{(N)} = 1 \quad (D.25)$$

dvs.

$$C_{k\ell} A^k A^\ell = 1 \quad (D.26)$$

Spændingerne bestemmes under hensyn til denne binding ud fra

$$F = W + T(C_{k\ell} A^k A^\ell - 1)/2\rho_0 \quad (D.27)$$

og man finder

$$P^{mn} = 2\rho_0 \partial W / \partial C_{mn} + T A^m A^n \quad (D.28)$$

eller

$$\sigma^{k\ell} = 2\rho x_{,m}^k x_{,n}^\ell \partial W / \partial C_{mn} + t a^k a^\ell \quad (D.29)$$

Bindingen medfører således et ubestemt træk i den ustrækkelige retning.

## D.2 Statistiske bindinger

Ved indre statiske bindinger forstås i analogi med indre geometriske bindinger én eller flere relationer af typen

$$f(\sigma^{11}, \sigma^{12}, \dots, \sigma^{33}) = K \quad (D.30)$$

hvor  $\sigma^{11}, \dots$  er komponenterne af Cauchys spændingstensor, og  $K$  er en konstant. Virkningen af statiske bindinger skal eksempelvis belyses ved et materiale for hvilket der inden for den infinitesimale elasticitetsteori rammer eksisterer en komplementær elastisk energi  $C$ , således at

$$\epsilon_{k\ell} = \partial C / \partial \sigma^{k\ell} \quad (D.31)$$

hvor

$$\epsilon_{k\ell} = \frac{1}{2} (\partial u_k / \partial x^\ell + \partial u_\ell / \partial x^k) \quad (D.32)$$

er den infinitesimale tøjningstensors komponenter. Dannes funktionen

$$G = C + \gamma(f - K) \quad (D.33)$$

hvor  $\gamma$  er en ubestemt Lagrangefaktor, bestemmes tøjningerne under hensyn til bindingen (D.30) ved

$$\epsilon_{k\ell} = \partial G / \partial \sigma^{k\ell} = \partial C / \partial \sigma^{k\ell} + \gamma \partial f / \partial \sigma^{k\ell} \quad (D.34)$$

hvoraf det fremgår, at der i materialet optræder ubestemte tøjninger. Dannes tilvæksten i komplementær energi

$$dC = \epsilon_{k\ell} d\sigma^{k\ell} \quad (D.35)$$

ses det, at de ubestemte tøjningers samlede bidrag til den komplementære energi er nul. Et eksempel på materialer med indre statiske bindinger har man i teorien for ideale væsker, hvor man regner forskydningsspændingerne lig med nul. At der i dette tilfælde er tale om en relation mellem spændingstensoren og tøjningshastighedstensoren spiller i denne forbindelse ingen rolle.

Et andet eksempel på materialer med indre statiske bindinger har man ved inden for plasticitetsteorien at opfatte en flydebetingelse som en statisk binding. En flydebetingelse gives ofte på formen

$$f(\sigma^{11}, \sigma^{12}, \dots, \sigma^{33}) = 0 \quad (\text{D.36})$$

som er af typen (D.30). Plasticitetsteorien adskiller sig fra de øvrige eksempler i dette kapitel ved, at også andre spændingstilstande end dem, der tilfredsstiller (D.36), kan forekomme. Sædvanligvis forudsættes, at  $f \leq 0$  svarer til tilladelige spændinger med specielt  $f = 0$  svarende til flydning, mens  $f > 0$  ikke er muligt. For  $f < 0$  kan materialet for eksempel være elastisk og tøjningerne bestemmes ved et udtryk som (D.31), eller materialet kan være stift, hvilket medfører at tøjningerne er nul.

I flydestadiet udtrykkes tøjningerne ofte ved v. Mises' flydelov

$$\epsilon_{kl}^{(p)} = \lambda \partial f / \partial \sigma^{kl} \quad (\text{D.37})$$

hvor  $\epsilon_{kl}^{(p)}$  er de plastiske tøjninger og  $\lambda$  er en ubestemt faktor. Opfattes  $\sigma^{kl}$  og  $\epsilon_{kl}^{(p)}$  som 6- (eller 9-) dimensionale vektorer i et  $\sigma^{kl}$ -rum, er  $f = 0$  en flade, flydefladen, i dette rum og  $\epsilon_{kl}^{(p)}$  givet ved (D.37) er en vektor vinkelret på flydefladen. (D.37) betegnes derfor også normalitetsbetingelsen, den er baseret på v. Mises' hypotese om, at spændingerne svarende til en given tøjningstilstand antager sådanne værdier, at det udførte arbejde bliver størst muligt (se fx [77.14]).

Af (D.34) ses, at man ved at opfatte flydebetingelsen som en statisk binding kommer til samme resultat som (D.37) med hensyn til ubestemtheden på tøjningerne.



---

APPENDIX E. KONTROLLABLE DEFORMATIONER

Ved *kontrollable deformationer* forstås deformationer, som kan påføres et materiale alene ved hjælp af overfladespændinger, uafhængigt af de parametre, som indgår i materialets konstitutive ligninger. For de forskellige materialetyper med hver sine konstitutive ligninger, eksisterer der således forskellige kontrollable deformationer. At kontrollable deformationer kan benyttes til bestemmelse af materialeparametre som fx elasticitetskonstanter, har været erkendt længe, men det var først med Ericksens arbejde [54.03] og [55.05], at en systematisk bestemmelse af samtlige kontrollable deformationer for visse materialer blev begyndt. Ericksens arbejde var inspireret af Rivlins succes med at finde løsninger for usammentrykkelige materialer inden for den ikke-lineære elasticitetsteori, se [48.01], [48.02], [48.03], [48.04], [49.01], [49.02], [51.01] og [51.02]. Andre betegnelser for kontrollable deformationer er *universale deformationer* eller *løsninger* og *eksakte løsninger*.

Problemet består i, at man for et materiale med konstitutive ligninger som fx

$$\sigma^{k\ell} = f^{k\ell}(C_{mn}) \quad (\text{E.1})$$

skal finde løsninger, som uafhængigt af de materialeparametre, der indgår i (E.1), identisk tilfredsstiller enten

$$\sigma_{,k}^{k\ell} + \rho f^{\ell} = \rho a^{\ell}, \quad \text{dynamisk kontrollable deformationer} \quad (\text{E.2})$$

eller

$$\sigma_{,k}^{k\ell} + \rho f^{\ell} = 0, \quad \text{statisk kontrollable deformationer} \quad (\text{E.3})$$

Kun statisk kontrollable deformationer for Green-elastiske materialer skal omtales i det følgende, og yderligere er massekræfterne  $f^{\ell}$  regnet lig nul.

Med hensyn til materialer, der kan karakteriseres som isotrope, homogene, Green-elastiske (se (C.63)), uden indre bindinger og uden massekræfter, har Ericksen [55.05] fundet, at de eneste mulige kontrollable deformationer er homogene deformationer, som i et cartesisk koordinatsystem kan angives ved

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{A}_q^k \mathbf{X}^q + \mathbf{B}^k \quad (\text{E.4})$$

hvor  $\mathbf{A}_q^k$  og  $\mathbf{B}^k$  er konstanter. For materialer med indre, geometriske bindinger bliver flere deformationer mulige som kontrollable deformationer, se fx Kafadar [75.08], til hvem der i øvrigt henvises vedrørende en oversigt over dette emne. Det skal i denne forbindelse bemærkes, at et materiale, som er bundet til at undergå infinitesimale deformationer, må opfattes som et materiale med indre bindinger, og der eksisterer da også flere kontrollable deformationer end dem, der er givet ved (E.4) inden for den lineære elasticitetsteori.

Deformationerne (E.4) er også kontrollable for materialer med retliniet anisotropi. For materialer med krumliniet anisotropi, men i øvrigt homogene, Green-elastiske, uden indre bindinger og uden massekræfter, eksisterer der ifølge Kafadar [75.08] ingen kontrollable deformationer.

For materialer med en indre binding i form af usammentrykkelighed eksisterer der flere kontrollable deformationer i både det isotrope og det anisotrope tilfælde. Truesdell & Noll [65.01] har for nogle deformationer, som er kontrollable for isotrope materialer, undersøgt hvilke symmetribetingelser et anisotrop materiale skal opfylde, når disse deformationer også skal være kontrollable for sådanne materialer. Materialer med en indre binding i form af ustrækkelighed i 1 retning er undersøgt af Beskos [72.09] og [73.06] i såvel det sammentrykkelige som det usammentrykkelige tilfælde. Det skal til slut nævnes, at Aifantis og Beskos [76.08] har undersøgt dynamisk kontrollable deformationer for usammentrykkelige materialer med 1 ustrækkelig retning (ideale fiberarmerede materialer).

---

APPENDIX F. TODIMENSIONALE LINEÆRELASTISKE PROBLEMER

I den lineære elasticitetsteori kan man til løsning af statiske problemer, under forudsætning af, at der ses bort fra massekræfter, fx benytte én af følgende fremgangsmåder.

a) Tøjnings-flytningsrelationerne

$$\epsilon_{mn} = \frac{1}{2} (u_{m,n} + u_{n,m}) \quad (F.1)$$

indsættes i spændings-tøjningsrelationerne

$$\sigma^{k\ell} = C^{k\ell mn} \epsilon_{mn} \quad (F.2)$$

som indsættes i ligevægtsligningerne

$$\sigma^{k\ell}_{,k} = 0 \quad (F.3)$$

Herved fremkommer de 3 såkaldte Navier-ligninger

$$\frac{1}{2} C^{k\ell mn} (u_{m,nk} + u_{n,mk}) = 0 \Rightarrow C^{k\ell mn} u_{m,nk} = 0 \quad (F.4)$$

som sammen med randbetingelserne bestemmer de 3 flytninger  $u_p$ .

b) Spændingerne udtrykt ved spændingsfunktioner

$$\sigma^{k\ell} = e^{kpr} e^{\ell qs} \varphi_{pq,rs} \quad (F.5)$$

indsættes i tøjnings-spændingsrelationerne

$$\epsilon_{mn} = S_{mnk\ell} \sigma^{k\ell} \quad (F.6)$$

som indsættes i kompatibilitetsbetingelserne

$$S^{ij} = e^{imt} e^{jnu} \epsilon_{mn,tu} = 0 \quad (F.7)$$

Herved fremkommer, da  $S^{ij} = S^{ji}$ , 6 ligninger

$$e^{imt} e^{jnu} e^{kpr} e^{\ell qs} \varphi_{pq,rstu} = 0 \quad (F.8)$$

som sammen med randbetingelserne bestemmer de 6 spændingsfunktioner  $\varphi_{pq} = \varphi_{qp}$ , idet der forudsættes at være tale om enkeltsammenhængende områder.

Til brug ved specialisering til to dimensioner af disse udtryk, som gælder i tre dimensioner, er følgende former nyttige. Ligevægtsligningerne skrives

$$\sigma^{\kappa\lambda}_{,\kappa} + \sigma^{3\lambda}_{,3} = 0 \quad \text{og} \quad \sigma^{\kappa 3}_{,\kappa} + \sigma^{33}_{,3} = 0 \quad (F.9)$$

og udtrykket

$$a^{k\lambda} = e^{kmp} e^{2nq} b_{mn,pq} \quad (F.10)$$

som har samme form som såvel sammenhængen mellem spændinger og spændingsfunktioner som kompatibilitetsbetingelserne, spaltes i

$$\begin{aligned} a^{\kappa\lambda} &= e^{\kappa\gamma 3} e^{\lambda\alpha 3} (b_{33,\gamma\alpha} - b_{\gamma 3,3\alpha} - b_{3\alpha,\gamma 3} + b_{\gamma\alpha,33}) \\ a^{3\lambda} &= e^{\delta\gamma 3} e^{\alpha\lambda 3} (b_{\delta 3,\gamma\alpha} - b_{\delta\alpha,\gamma 3}) \\ a^{33} &= e^{\delta\gamma 3} e^{\beta\alpha 3} b_{\delta\beta,\gamma\alpha} \end{aligned} \quad (F.11)$$

For at opnå, at en plan spændingstilstand medfører en deformationstilstand, som hovedsagelig er plan, og omvendt, betragtes kun materialer som har  $x^1 x^2$ -planen som symmetriplan, hvilket udtrykkes ved

$$\begin{aligned} C^{\alpha 333} &= C^{\alpha\beta\gamma 3} = 0 \\ S_{\alpha 333} &= S_{\alpha\beta\gamma 3} = 0 \end{aligned} \quad (F.12)$$

---

### F1. Plan spændingstilstand

En plan spændingstilstand defineres her ved

$$\sigma^{3\lambda} = 0 \quad \text{og} \quad \sigma^{\kappa\lambda} = \sigma^{\kappa\lambda}(x^k) \quad (F.13)$$

hvorfor de eneste ligevægtsligninger i.h.t. (F.9) er

$$\sigma^{\kappa\lambda}_{,\kappa} = 0 \quad (F.14)$$

a) Spændings-tøjningsrelationerne bliver

$$\begin{aligned} \sigma^{\kappa\lambda} &= C^{\kappa\lambda mn} \epsilon_{mn} = C^{\kappa\lambda\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + 2C^{\kappa\lambda\alpha 3} \epsilon_{\alpha 3} + C^{\kappa\lambda 33} \epsilon_{33} \\ &= C^{\kappa\lambda\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + C^{\kappa\lambda 33} \epsilon_{33} \end{aligned} \quad (F.15)$$

idet symmetribetingelsen (F.12) er benyttet.

Af

$$\sigma^{33} = 0 = C^{33\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + C^{3333} \epsilon_{33} \quad (F.16)$$

fås

$$\epsilon_{33} = -C^{33\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} / C^{3333} \quad (F.17)$$

som indsat i (F.15) giver

$$\sigma^{\kappa\lambda} = (C^{\kappa\lambda\alpha\beta} - C^{\kappa\lambda 33} C^{33\alpha\beta} / C^{3333}) \epsilon_{\alpha\beta} \equiv c^{\kappa\lambda\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (F.18)$$

hvor  $c$  betegnes den reducerede stivhedstensor. Indsættes i ligevægtsligningerne, fås

$$c^{\kappa\lambda\alpha\beta}u_{\alpha,\beta\kappa} = 0 \quad (F.19)$$

til bestemmelse af de 2 flytninger  $u_\alpha$ .

Herefter bestemmes tøjningerne  $\epsilon_{\alpha\beta}$  ved

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (F.20)$$

spændingerne  $\sigma^{\kappa\lambda}$  ved (F.18) og tøjningerne  $\epsilon_{3\alpha}$  ved

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} &= S_{33\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} \\ \epsilon_{3\alpha} &= S_{3\alpha\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (F.21)$$

idet symmetribetingelsen (F.12) benyttes. Da samtlige tøjninger  $\epsilon_{mn}$  er bestemt, kan også flytningen  $u_3$  bestemmes.

Af (F.19) kan  $u_\alpha$  normalt kun bestemmes som funktioner af  $x^\beta$ , mens afhængigheden af  $x^3$  ikke lader sig bestemme. Der vil således være tale om en tilnærmelse til den korrekte løsning, se også under b).

b) Idet man ifølge (F.21) har  $\epsilon_{3\alpha} = 0$ , bliver kompatibilitetsligningerne, se (F.11)

$$\begin{aligned} S^{\kappa\lambda} &= e^{\kappa\gamma} e^{\lambda\alpha} (\epsilon_{33,\gamma\alpha} + \epsilon_{\gamma\alpha,33}) = 0 \\ S^{3\lambda} &= e^{\delta\gamma} e^{\alpha\lambda} \epsilon_{\delta\beta,\gamma 3} = 0 \\ S^{33} &= e^{\delta\gamma} e^{\beta\alpha} \epsilon_{\delta\beta,\gamma\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (F.22)$$

Med tøjningerne bestemt ved

$$\epsilon_{mn} = S_{mn\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} \quad (F.23)$$

hvor  $\sigma^{\kappa\lambda}$  i henhold til (F.13) er funktioner af alle  $x^k$ , bliver også  $\epsilon_{mn}$  funktioner af alle  $x^k$ , og ingen af de 6 kompatibilitetsligninger vil på forhånd være identisk opfyldt. Antages, at  $\sigma^{\kappa\lambda}$  og dermed  $\epsilon_{mn}$  er funktioner af  $x^\alpha$  alene, bliver de første ligninger i (F.22)

$$\epsilon_{33,11} = \epsilon_{33,12} = \epsilon_{33,22} = 0 \quad (F.22a)$$

hvilket medfører, at  $\epsilon_{33}$  skal være en lineær funktion af  $x^1$  og  $x^2$ . Dette vil generelt ikke være tilfældet for skiveproblemer.

Sædvanligvis betragtes  $\sigma^{\kappa\lambda}$  som funktioner af  $x^\alpha$  alene, og der ses bort fra (F.22a). De midterste ligninger i (F.22) er identisk opfyldt, og tilbage har man den sidste ligning i (F.22) sammen med ligevægtsligningerne (F.14). En diskussion af denne tilnærmelse findes bl.a. i Timoshenko og Goodier [51.04].

En todimensional løsning til ligevægtsligningerne (F.14) er

$$\sigma^{\kappa\lambda} = e^{\kappa\alpha} e^{\lambda\beta} \varphi_{,\alpha\beta} \quad (F.24)$$

hvor  $\varphi = \varphi(x^\alpha)$ . Ifølge (F.11) svarer dette til  $\varphi_{33} = \varphi, \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{3\alpha} = 0$ ,  $\varphi$  er Airys spændingsfunktion.

Indsættes således (F.24) i (F.23), som herefter indsættes i den sidste ligning i (F.22), fås

$$e^{\alpha\gamma} e^{\beta\delta} e^{\kappa\mu} e^{\lambda\nu} S_{\alpha\beta\kappa\lambda} \varphi_{,\mu\nu\gamma\delta} = 0 \quad (\text{F.25})$$

til bestemmelse af  $\varphi$ . Herefter bestemmes spændingerne  $\sigma^{\kappa\lambda}$  ved (F.22), tøjningerne  $\epsilon_{mn}$  ved (F.24), og flytningerne  $u_k$  ved (F.1).

## F2. Plan deformationstilstand

En plan deformationstilstand defineres her ved

$$u_3 = 0 \quad \text{og} \quad u_{\alpha,3} = 0 \quad (\text{F.26})$$

hvilket medfører

$$\epsilon_{33} = 0, \quad \epsilon_{\alpha 3} = 0, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}^\gamma) \quad (\text{F.27})$$

a) Spændingerne  $\sigma^{k\lambda}$  bliver

$$\begin{aligned} \sigma^{\kappa\lambda} &= C^{\kappa\lambda\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \\ \sigma^{3\lambda} &= C^{3\lambda\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} = 0 \\ \sigma^{33} &= C^{33\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

som indsat i ligevægtsligningerne (F.9) giver

$$C^{\kappa\lambda\alpha\beta} u_{\alpha,\beta\kappa} = 0 \quad (\text{F.29})$$

til bestemmelse af flytningerne  $u_\alpha$ .

b) Af kompatibilitetsbetingelserne, se (F.23), er det kun

$$e^{\alpha\gamma} e^{\beta\delta} \epsilon_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 0 \quad (\text{F.30})$$

som ikke er identisk opfyldt. Tøjnings-spændingsrelationerne er

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta k\lambda} \sigma^{k\lambda} = S_{\alpha\beta\kappa\lambda} \sigma^{\kappa 3} + 2S_{\alpha\beta\kappa 3} \sigma^{\kappa 3} + S_{\alpha\beta 33} \sigma^{33} \\ &= S_{\alpha\beta\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} + S_{\alpha\beta 33} \sigma^{33} \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

Af

$$\epsilon_{33} = 0 = S_{33\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} + S_{3333} \sigma^{33} \quad (\text{F.32})$$

fås

$$\sigma^{33} = -S_{33\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} / S_{3333} \quad (\text{F.33})$$

som indsat i (F.31) giver

$$\epsilon_{\alpha\beta} = (S_{\alpha\beta\kappa\lambda} - S_{\alpha\beta 33} S_{33\kappa\lambda} / S_{3333}) \sigma^{\kappa\lambda} \equiv S_{\alpha\beta\kappa\lambda} \sigma^{\kappa\lambda} \quad (\text{F.34})$$

hvor  $\underline{s}$  kaldes den reducerede eftergivlighedstensor. Af (F.27) og (F.28) fremgår, at spændingerne  $\sigma^{\kappa\lambda}$  er funktioner af  $x^\alpha$  alene, og spændingerne  $\sigma^{\kappa\lambda}$  er derfor bestemt ved en spændingsfunktion  $\varphi(x^\alpha)$ , dvs. ved (F.22). Indsættes (F.22) i (F.34), som derefter indsættes i (F.30), har man

$$e^{\alpha\gamma} e^{\beta\delta} e^{\kappa\mu} e^{\lambda\nu} s_{\alpha\beta\kappa\lambda} \varphi_{,\mu\nu\gamma\delta} = 0 \quad (\text{F.35})$$

til bestemmelse af  $\varphi$ .

Man har således til bestemmelse af flytningerne  $u_\alpha$

$$(\text{F.19}): c^{\kappa\lambda\alpha\beta} u_{\alpha,\beta\kappa} = 0 \quad , \quad \text{plan spændingstilstand}$$

$$(\text{F.29}): C^{\kappa\lambda\alpha\beta} u_{\alpha,\beta\kappa} = 0 \quad , \quad \text{plan deformationstilstand}$$

og til bestemmelse af spændingsfunktionen  $\varphi$

$$(\text{F.25}): e^{\alpha\gamma} e^{\beta\delta} e^{\kappa\mu} e^{\lambda\nu} S_{\alpha\beta\kappa\lambda} \varphi_{,\mu\nu\gamma\delta} = 0, \quad \text{plan spændingstilstand}$$

$$(\text{F.35}): e^{\alpha\gamma} e^{\beta\delta} e^{\kappa\mu} e^{\lambda\nu} s_{\alpha\beta\kappa\lambda} \varphi_{,\mu\nu\gamma\delta} = 0, \quad \text{plan deformationstilstand}$$

hvor  $\underline{C}$  og  $\underline{S}$  er den tredimensionale teoris elasticitetstensorer, og hvor de reducerede elasticitetstensorer  $\underline{c}$  og  $\underline{s}$  er defineret ved (F.18) og (F.34). Det ses, at en løsning til et plant spændingsproblem også er en løsning til et plant deformationsproblem, når  $\underline{c}$  erstattes med  $\underline{C}$  eller  $\underline{s}$  med  $\underline{S}$ .

### F3. Antiplan deformationstilstand, vridning

En antiplan deformationstilstand defineres her ved

$$u_\alpha = \theta e_{\beta\alpha} x^\beta x^3 \quad \text{og} \quad u_3 = \theta \psi(x^\alpha) \quad (\text{F.36})$$

hvor vridningsvinklen pr. længdeenhed  $\theta$  er en konstant. Dette medfører

$$\epsilon_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \epsilon_{3\alpha} = \frac{1}{2} \theta (\psi_{,\alpha} + e_{\beta\alpha} x^\beta) \quad , \quad \epsilon_{33} = 0 \quad (\text{F.37})$$

a) Spændingerne bliver

$$\begin{aligned} \sigma^{\kappa\lambda} &= C^{\kappa\lambda\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + 2C^{\kappa\lambda 3\alpha} \epsilon_{3\alpha} + C^{\kappa\lambda 33} \epsilon_{33} = 0 \\ \sigma^{3\lambda} &= C^{3\lambda\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + 2C^{3\lambda 3\alpha} \epsilon_{3\alpha} + C^{3\lambda 33} \epsilon_{33} = C^{3\lambda 3\alpha} \theta (\psi_{,\alpha} + e_{\beta\alpha} x^\beta) \quad (\text{F.38}) \\ \sigma^{33} &= C^{33\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + 2C^{33 3\alpha} \epsilon_{3\alpha} + C^{33 33} \epsilon_{33} = 0 \end{aligned}$$

idet (F.12) og (F.37) benyttes. Den eneste ligevægtsligning, se (F.9), som ikke er identisk opfyldt, er således

$$\sigma^{\kappa 3}_{,\kappa} = 0 \quad (\text{F.39})$$

og indsættes heri fra (F.38), fås

$$C^{\kappa 3 \alpha 3} \theta (\psi_{,\alpha \kappa} + e_{\kappa \alpha}) = C^{\kappa 3 \alpha 3} \theta \psi_{,\alpha \kappa} = 0 \quad (\text{F.40})$$

til bestemmelse af hvælvningsfunktionen  $\psi(x^\alpha)$ , mens vridningsvinklen pr. længdeenhed  $\theta$  bestemmes ved randbetingelserne.

b) En løsning til ligevægtsligningerne (F.39) ses at være

$$\sigma^{\kappa 3} = e^{\kappa \alpha} T_{,\alpha} \quad (\text{F.41})$$

hvor  $T$  er Prandtls spændingsfunktion.

Ved anvendelse af (F.11) og (F.37) ses, at de eneste kompatibilitetsbetingelser, som ikke er identisk opfyldt, er

$$e^{\delta \gamma} e^{\alpha \lambda} \epsilon_{\delta 3, \gamma \alpha} = 0 \quad (\text{F.42})$$

Tøjnings-spændingsrelationerne er

$$\epsilon_{3\beta} = 2S_{3\beta 3\lambda} \sigma^{3\lambda} \quad (\text{F.43})$$

idet (F.38) benyttes.

Kompatibilitetsbetingelserne (F.42) skrives

$$e^{\alpha \lambda} (e^{\delta \gamma} \epsilon_{\delta 3, \gamma \alpha})_{,\alpha} = 0 \quad (\text{F.44})$$

med løsningen

$$e^{\delta \gamma} \epsilon_{\delta 3, \gamma} = C \quad (\text{F.45})$$

hvor  $C$  er en konstant. Indsættes heri fra (F.37), fås

$$C = e^{\delta \gamma} \frac{1}{2} \theta (\psi_{,\delta \gamma} + e_{\gamma \delta}) = -\theta \quad (\text{F.46})$$

Indsættes nu (F.41) i (F.43), som herefter indsættes i (F.45) med  $C = -\theta$ , fås

$$e^{\delta \gamma} e^{\lambda \alpha} 2S_{\delta 3 3 \lambda} T_{,\alpha \gamma} = -\theta \quad (\text{F.47})$$

til bestemmelse af  $T$ .



---

APPENDIX G. KOMPLEKSE AKSER

En drejning om tredieaksen i et ortonormeret aksestystem kan på matrixform skrives

$$[\beta_{\varrho}^k] = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1})$$

hvor  $\chi$  er drejningsvinklen.

Matricens egenverdier bestemmes ved

$$\det(\beta_{\varrho}^k - \lambda \delta_{\varrho}^k) = \begin{vmatrix} \cos\chi - \lambda & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{G.2})$$

eller

$$(1 - \lambda)(1 - 2\lambda \cos\chi + \lambda^2) = 0 \quad (\text{G.3})$$

med rødderne

$$\lambda_1 = \cos\chi + i\sin\chi = e^{i\chi}$$

$$\lambda_2 = \cos\chi - i\sin\chi = e^{-i\chi} \quad (\text{G.4})$$

$$\lambda_3 = 1$$

Egenvektorerne  $\bar{v}_k$  bestemmes ved

$$\begin{bmatrix} \cos\chi - \lambda_k & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi - \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ v_k^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G.5})$$

og bliver

$$v_1^m = \{1/\sqrt{2} \quad i/\sqrt{2} \quad 0\}$$

$$v_2^m = \{i/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0\} \quad (\text{G.6})$$

$$v_3^m = \{0 \quad 0 \quad 1\}$$

Tensorer transformeres fra det oprindelige akse-system til systemet med komplekse akser ved

$$A_{\ell}^k \dots = b_{\ell}^m \dots g_n^k \dots a_m^n \dots \quad (\text{G.7})$$

hvor

$$[b_{\ell}^m] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.8})$$

$$[g_n^k] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.9})$$

Specielt transformeres drejningstensoren  $\beta$  ved

$$B_{\ell}^k = b_{\ell}^m g_n^k \beta_m^n \quad (\text{G.10})$$

eller på matrixform

$$[B_{\ell}^k] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\chi + i\sin\chi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\chi - i\sin\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\chi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\chi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.11})$$

---

APPENDIX H. TRANSFORMATION AF FJERDEORDENS TENSORER,  
SYMMETRIRELATIONER OG SYMMETRIGRUPPER

---

Transformationsreglen for fjerdeordens tensorer er

$$A_{mn}^{k\ell} = \beta_m^p \beta_n^q \gamma_r^k \gamma_s^\ell a_{pq}^{rs} \quad (\text{H.1})$$

Ved at skrive

$$A_{mn}^{k\ell} = \gamma_r^k \gamma_s^\ell a_{pq}^{rs} \beta_m^p \beta_n^q \quad (\text{H.2})$$

og udføre nogle summationer, fås

$$\begin{aligned} A_{mn}^{k\ell} = & \gamma_s^\ell \{ \gamma_1^k (a_{1q}^{1s} \beta_m^1 + a_{2q}^{1s} \beta_m^2 + a_{3q}^{1s} \beta_m^3) + \\ & + \gamma_2^k (a_{1q}^{2s} \beta_m^1 + a_{2q}^{2s} \beta_m^2 + a_{3q}^{2s} \beta_m^3) + \\ & + \gamma_3^k (a_{1q}^{3s} \beta_m^1 + a_{2q}^{3s} \beta_m^2 + a_{3q}^{3s} \beta_m^3) \} \beta_n^q \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

Dette udtryk kan på matrixform skrives

$$[A_{mn}^{k\ell}] = \begin{bmatrix} A_{1n}^{1\ell} & A_{2n}^{1\ell} & A_{3n}^{1\ell} \\ A_{1n}^{2\ell} & A_{2n}^{2\ell} & A_{3n}^{2\ell} \\ A_{1n}^{3\ell} & A_{2n}^{3\ell} & A_{3n}^{3\ell} \end{bmatrix} = [\gamma_{rs}^{k\ell}] [a_{pq}^{rs}] [\beta_{mn}^{pq}] = \quad (\text{H.4})$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1^1 \gamma_s^\ell & \gamma_2^1 \gamma_s^\ell & \gamma_3^1 \gamma_s^\ell \\ \gamma_1^2 \gamma_s^\ell & \gamma_2^2 \gamma_s^\ell & \gamma_3^2 \gamma_s^\ell \\ \gamma_1^3 \gamma_s^\ell & \gamma_2^3 \gamma_s^\ell & \gamma_3^3 \gamma_s^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1q}^{1s} & a_{2q}^{1s} & a_{3q}^{1s} \\ a_{1q}^{2s} & a_{2q}^{2s} & a_{3q}^{2s} \\ a_{1q}^{3s} & a_{2q}^{3s} & a_{3q}^{3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^1 \beta_n^q & \beta_2^1 \beta_n^q & \beta_3^1 \beta_n^q \\ \beta_1^2 \beta_n^q & \beta_2^2 \beta_n^q & \beta_3^2 \beta_n^q \\ \beta_1^3 \beta_n^q & \beta_2^3 \beta_n^q & \beta_3^3 \beta_n^q \end{bmatrix}$$

dvs. transformationen kan udføres ved matrixmultiplikation med  $9 \times 9$  matrixer.

Ved en drejning vinklen  $\chi$  om den tredje basisvektor  $\hat{i}_3$  i et ortonormeret system af basisvektorer  $\hat{i}_k$ , har man

$$[\gamma_s^\ell] = \begin{bmatrix} \cos\chi & -\sin\chi & 0 \\ \sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\beta_n^q] = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{H.5})$$



Til bestemmelse af symmetrirelationer benyttes, at

$$\beta_k^t \beta_l^u A_{mn}^{kl} = \delta_r^t \delta_s^u a_{pq}^{rs} \beta_m^p \beta_n^q = a_{pq}^{tu} \beta_m^p \beta_n^q \quad (\text{H.10})$$

således at symmetrirelationerne bliver

$$\beta_k^r \beta_l^s a_{mn}^{kl} = a_{pq}^{rs} \beta_m^p \beta_n^q \quad (\text{H.11})$$

eller, på matrixform

$$[\beta_{kl}^{rs}] [a_{mn}^{kl}] = \begin{bmatrix} \beta_{1l}^{1s} & \beta_{2l}^{1s} & \beta_{3l}^{1s} \\ \beta_{1l}^{2s} & \beta_{2l}^{2s} & \beta_{3l}^{2s} \\ \beta_{1l}^{3s} & \beta_{2l}^{3s} & \beta_{3l}^{3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n}^{1l} & a_{2n}^{1l} & a_{3n}^{1l} \\ a_{1n}^{2l} & a_{2n}^{2l} & a_{3n}^{2l} \\ a_{1n}^{3l} & a_{2n}^{3l} & a_{3n}^{3l} \end{bmatrix} =$$

$$[a_{pq}^{rs}] [\beta_{mn}^{pq}] = \begin{bmatrix} a_{1q}^{1s} & a_{2q}^{1s} & a_{3q}^{1s} \\ a_{1q}^{2s} & a_{2q}^{2s} & a_{3q}^{2s} \\ a_{1q}^{3s} & a_{2q}^{3s} & a_{3q}^{3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1n}^{1q} & \beta_{2n}^{1q} & \beta_{3n}^{1q} \\ \beta_{1n}^{2q} & \beta_{2n}^{2q} & \beta_{3n}^{2q} \\ \beta_{1n}^{3q} & \beta_{2n}^{3q} & \beta_{3n}^{3q} \end{bmatrix} \quad (\text{H.12})$$

Ved anvendelse af (H.12) kan man bestemme de relationer mellem tensor-komponenterne, som skal være opfyldt, når  $\hat{i}_3$  er en n-fold symmetriakse. Da en fjerdeordens tensor i henhold til afsnit 2.1.4 ikke kan skelne mellem drejninger for hvilke  $n > 4$ , er det kun nødvendigt at undersøge tilfældene  $n = 1, 2, 3, 4$  samt vilkårlige drejninger symboliseret ved  $n = \infty$ . Ved ombytning af aksebetegnelser bestemmer man herefter de relationer, som skal være opfyldt, når  $\hat{i}_1$  henholdsvis  $\hat{i}_2$  er n-fold symmetriakser. Ved at sammenligne resultaterne kan man bestemme de relationer, som skal være opfyldt, når den ene akse er en m-fold, den anden en n-fold og den tredje en p-fold symmetriakse. Endelig bestemmes symmetrirelationerne, når symmetriaksen ikke er en basisvektor, og man kan finde de relationer, som skal være opfyldt, når en sådan akse er en m-fold symmetriakse, og én af basisvektorerne er en n-fold symmetriakse.

Symmetrirelationerne medfører visse restriktioner for de enkelte tensor-komponenter. Disse restriktioner er

- en komponent skal være nul,
- en komponent skal være en linearkombination af nogle af de andre komponenter, eller
- en komponent kan have en vilkårlig værdi (ingen restriktioner). En sådan komponent kaldes uafhængig.

Ved drejninger om kun en akse (her  $\hat{i}_3$ ) finder man, at følgende symmetri-grupper medfører forskellige restriktioner for fjerde ordens tensorer

$$\{1 \ 1 \ 1\}, \{1 \ 1 \ 2\}, \{1 \ 1 \ 3\}, \{1 \ 1 \ 4\} \text{ og } \{1 \ 1 \ \infty\} \quad (\text{H.13})$$

hvor  $\{m \ n \ p\}$  betyder, at  $\hat{i}_1$  er en m-fold,  $\hat{i}_2$  en n-fold og  $\hat{i}_3$  en p-fold symmetriakse.

Ved drejninger om 2 eller 3 på hinanden vinkelrette akser finder man, at grupperne

$$\{1 \ 2 \ 2\}, \{1 \ 2 \ 3\}, \{1 \ 2 \ 4\}, \{1 \ 4 \ 4\}, \{1 \ 2 \ \infty\} \text{ og } \{\infty \ \infty \ \infty\} \quad (\text{H.14})$$

medfører forskellige restriktioner.

Endelig finder man ved drejninger om ikke-ortogonale akser, at den eneste gruppe, som medfører nye restriktioner, kan angives som

$$\{1 \ 1 \ 2/3\} \quad (\text{H.15})$$

hvor  $1 \ 1 \ 2$  betyder, at  $\hat{i}_3$  er en 2-fold symmetriakse og  $/3$ , at en akse, som danner samme vinkel med de tre basisvektorer, er en 3-fold symmetriakse.

Som anført i afsnit 2.1.2 er

$$\beta_{\varrho}^k = \beta_{(1)m}^k \beta_{(2)\varrho}^m \quad (\text{H.16})$$

en symmetridrejning, når  $\beta_{(1)m}^k$  og  $\beta_{(2)\varrho}^m$  er symmetridrejninger. Heraf følger, at

$$\begin{aligned} \{1 \ 2 \ 2\} &\text{ medfører } \{2 \ 2 \ 2\} \\ \{1 \ 2 \ 4\} &\text{ medfører } \{2 \ 2 \ 4\} \\ \{1 \ 2 \ \infty\} &\text{ medfører } \{2 \ 2 \ \infty\} \end{aligned} \quad (\text{H.17})$$

som i øvrigt har samme restriktioner som  $\{2 \ 2 \ 3\}$

$$\begin{aligned} \{1 \ 4 \ 4\} &\text{ medfører } \{2 \ 4 \ 4\} \text{ og } \{4 \ 4 \ 4\} \\ \{1 \ 1 \ 2/3\} &\text{ medfører } \{1 \ 2 \ 2/3\} \text{ og } \{2 \ 2 \ 2/3\} \end{aligned}$$

Alle andre kombinationer af symmetriakser medfører samme restriktioner som symmetrigruppen  $\{\infty \ \infty \ \infty\}$  svarende til isotropi. Det bemærkes, at en ombytning af bogstaver i  $\{m \ n \ p\}$  ikke er en ny symmetrigruppe.

I de følgende matricer er uafhængige, afhængige og nul-komponenter anført for de 12 symmetrigrupper, som medfører forskellige restriktioner. På den plads, som svarer til en bestemt komponent, eksempelvis  $a_{21}^{12}$ , kan man finde følgende symboler med tilhørende betydning

$$\begin{matrix} 12 \\ 21 \end{matrix} - a_{21}^{12} \text{ er en uafhængig komponent}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} - a_{21}^{12} = a_{12}^{12} \quad (\text{H.18})$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} - a_{21}^{12} \text{ afhænger af flere komponenter, afhængigheden angives til højre for matricen}$$

$$0 - a_{21}^{12} = 0$$

For de tilfælde, hvor en eller flere af symmetrierne

$$a_{mn}^{k\varrho} = a_{mn}^{\varrho k} = a_{nm}^{k\varrho} = a_{k\varrho}^{mn} \quad (\text{H.19})$$

er til stede, er antallet af uafhængige komponenter anført i en tabel i slutningen af dette appendix.

{1 1 1}	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	13	13	13	13	13	13	13	13	13
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	21	21	21	21	21	21	21	21	21
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	22	22	22	22	22	22	22	22	22
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	23	23	23	23	23	23	23	23	23
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	31	31	31	31	31	31	31	31	31
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	32	32	32	32	32	32	32	32	32
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
	33	33	33	33	33	33	33	33	33
	11	12	13	21	22	23	31	32	33

{1 1 2}	11	11	0	11	11	0	0	0	11
	11	12		21	22				33
	12	12	0	12	12	0	0	0	12
	11	12		21	22				33
	0	0	13	0	0	13	13	13	0
			13			23	31	32	
	21	21	0	21	21	0	0	0	21
	11	12		21	22				33
	22	22	0	22	22	0	0	0	22
	11	12		21	22				33
	0	0	23	0	0	23	23	23	0
			13			23	31	32	
	0	0	31	0	0	31	31	31	0
			13			23			
	0	0	32	0	0	32	32	32	0
			13			23	31	32	
	33	33	0	33	33	0	0	0	33
	11	12		21	22				33

{1 1 3}	11	11	11	11	11	12	11	11	11
	11	12	13	21	22	13	31	32	33
	12	12	12	12	12	11	11	11	12
	11	12	13	21	22	13	32	31	33
	13	13	13	13	13	13	13	13	0
	22	21	13	21	22	23	31	32	
	12	12	12	12	12	11	11	11	12
	22	21	13	12	11	13	32	31	33
	11	11	11	11	11	12	11	11	11
	22	21	13	12	11	13	31	32	33
	13	13	13	13	13	13	13	13	0
	21	22	23	22	21	13	32	31	
	31	32	31	32	31	32	31	31	0
	11	11	13	11	11	13	31	32	
	32	31	32	31	32	31	31	31	0
	11	11	13	11	11	13	32	31	
	33	33	0	32	33	0	0	0	33
	11	12	0	12	11				33

$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} = 12 - 11 - 11$   
 $\begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} = 11 - 11 - 12$

{1 1 4}	11	11	0	11	11	0	0	0	11
	11	12	0	21	22	0	0	0	33
	12	12	0	12	12	0	0	0	12
	11	12	0	21	22	0	0	0	33
	0	0	13	0	0	13	13	13	0
			13			23	31	32	
	12	12	0	12	12	0	0	0	12
	22	21	0	12	11	0	0	0	33
	11	11	0	11	11	0	0	0	11
	22	21	0	12	11	0	0	0	33
	0	0	13	0	0	13	13	13	0
			23			13	32	31	
	0	0	31	0	0	32	31	31	0
			13			13	31	32	
	0	0	32	0	0	31	31	31	0
			13			13	32	31	
	33	33	0	33	33	0	0	0	33
	11	12	0	12	11				33



$$\{1 \ 1 \ \infty\} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc} 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 11 & 12 & & 21 & 22 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \\ \hline \textcircled{12} & 12 & 0 & \textcircled{12} & 12 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 11 & 12 & & 21 & 22 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 13 & 13 & 13 & 0 \\ & & 13 & & & 23 & 31 & 32 & \\ \hline \hline \textcircled{-12} & \textcircled{12} & 0 & \textcircled{12} & \textcircled{-12} & 0 & 0 & 0 & \textcircled{-12} \\ 22 & 21 & & 12 & 11 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \\ \hline \textcircled{11} & \textcircled{-11} & 0 & \textcircled{-11} & \textcircled{11} & 0 & 0 & 0 & \textcircled{11} \\ 22 & 21 & & 12 & 11 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & \textcircled{-13} & 0 & 0 & \textcircled{13} & \textcircled{-13} & \textcircled{13} & 0 \\ & & 23 & & & 13 & 32 & 31 & \\ \hline \hline 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & \textcircled{-32} & 31 & 31 & 0 \\ & & 13 & & & 13 & 31 & 32 & \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & \textcircled{31} & \textcircled{-31} & \textcircled{31} & 0 \\ & & 13 & & & 13 & 32 & 31 & \\ & & & & & & & & \\ \hline 33 & 33 & 0 & \textcircled{-33} & \textcircled{33} & 0 & 0 & 0 & 33 \\ 11 & 12 & & 12 & 11 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \textcircled{12}_{11} &= 12_{22} - 11_{21} - 11_{12} \\ \textcircled{12}_{21} &= 11_{11} - 11_{22} - 12_{12} \end{aligned}$$

$$\{1 \ 2 \ 2\} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc} 11 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 11 & & & & 22 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 12 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12 & & 21 & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ & & 13 & & & & 31 & & \\ \hline \hline 0 & 21 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12 & & 21 & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \hline 22 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 11 & & & & 22 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 23 & 0 \\ & & & & & 23 & & 32 & \\ & & & & & & & & \\ \hline \hline 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 \\ & & 13 & & & & 31 & & \\ & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 32 & 0 \\ & & & & & 23 & & 32 & \\ & & & & & & & & \\ \hline 33 & 0 & 0 & 0 & 33 & 0 & 0 & 0 & 33 \\ 11 & & & & 22 & & & & 33 \\ & & & & & & & & \end{array} \right]$$

{1 2 3}

$\frac{11}{11}$	0	$\frac{11}{13}$	0	$\frac{11}{22}$	0	$\frac{11}{31}$	0	$\frac{11}{33}$
0	$\frac{12}{12}$	0	$\frac{12}{21}$	0	$-\frac{11}{13}$	0	$-\frac{11}{31}$	0
$-\frac{13}{22}$	0	$\frac{13}{13}$	0	$\frac{13}{22}$	0	$\frac{13}{31}$	0	0
0	$\frac{12}{21}$	0	$\frac{12}{12}$	0	$-\frac{11}{13}$	0	$-\frac{11}{31}$	0
$\frac{11}{22}$	0	$-\frac{11}{13}$	0	$\frac{11}{11}$	0	$-\frac{11}{31}$	0	$\frac{11}{33}$
0	$\frac{13}{22}$	0	$\frac{13}{22}$	0	$\frac{13}{13}$	0	$\frac{13}{31}$	0
$\frac{31}{11}$	0	$\frac{31}{13}$	0	$-\frac{31}{11}$	0	$\frac{31}{31}$	0	0
0	$-\frac{31}{11}$	0	$-\frac{31}{11}$	0	$\frac{31}{13}$	0	$\frac{31}{31}$	0
$\frac{33}{11}$	0	0	0	$\frac{33}{11}$	0	0	0	$\frac{33}{33}$

$$\frac{12}{21} = \frac{11}{11} - \frac{11}{22} - \frac{12}{12}$$

{1 2 4}

$\frac{11}{11}$	0	0	0	$\frac{11}{22}$	0	0	0	$\frac{11}{33}$
0	$\frac{12}{12}$	0	$\frac{12}{21}$	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{13}{13}$	0	0	0	$\frac{13}{31}$	0	0
0	$\frac{12}{21}$	0	$\frac{12}{12}$	0	0	0	0	0
$\frac{11}{22}$	0	0	0	$\frac{11}{11}$	0	0	0	$\frac{11}{33}$
0	0	0	0	0	$\frac{13}{13}$	0	$\frac{13}{31}$	0
0	0	$\frac{31}{13}$	0	0	0	$\frac{31}{31}$	0	0
0	0	0	0	0	$\frac{31}{13}$	0	$\frac{31}{31}$	0
$\frac{33}{11}$	0	0	0	$\frac{33}{11}$	0	0	0	$\frac{33}{33}$

$$\{1 \ 2 \ 8\} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{33} \\ 0 & \frac{12}{12} & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{13} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{31} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12}{21} & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{13} & 0 & \frac{13}{31} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{31}{13} & 0 & 0 & 0 & \frac{31}{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{31}{13} & 0 & \frac{31}{31} & 0 \\ \frac{33}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{33}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{33}{33} \end{array} \right]$$

$$\frac{12}{21} = \frac{11}{11} \cdot \frac{11}{22} \cdot \frac{12}{12}$$

$$\{1 \ 4 \ 4\} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} \\ 0 & \frac{12}{12} & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12}{21} & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & \frac{12}{21} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{21} & 0 & \frac{12}{12} & 0 \\ \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{11} \end{array} \right]$$

$$\{1 \ 1 \ 2/3\} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{33} \\ 0 & \frac{12}{12} & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{13} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{31} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{13}{31} & 0 & \frac{13}{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{33} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & \frac{12}{21} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{31} & 0 & \frac{13}{13} & 0 \\ \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{33} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{11} \end{array} \right]$$

$$\{\infty \ \infty \ \infty\} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} \\ 0 & \frac{12}{12} & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{12}{21} & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & \frac{12}{21} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{12}{21} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{21} & 0 & \frac{12}{12} & 0 \\ \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{11} \end{array} \right]$$

$$\frac{12}{21} = \frac{11}{11} \cdot \frac{11}{22} \cdot \frac{12}{12}$$

Symmetrigruppe	$a_{mn}^{k\ell}$	$a_{mn}^{k\ell} = a_{mn}^{\ell k}$	$a_{mn}^{k\ell} = a_{mn}^{\ell k}$ $= a_{nm}^{k\ell}$	$a_{mn}^{k\ell} = a_{mn}^{\ell k}$ $= a_{nm}^{k\ell} = a_{k\ell}^{mn}$
{1 1 1}	81	54	36	21
{1 1 2}	41	28	20	13
{1 1 3}	27	18	12	7
{1 1 4}	21	14	10	7
{1 1 $\infty$ }	19	12	8	5
{1 2 2}	21	15	12	9
{1 2 3}	14	10	8	6
{1 2 4}	11	8	7	6
{1 2 $\infty$ }	10	7	6	5
{1 4 4}	4	3	3	3
{1 1 2/3}	7	5	4	3
{ $\infty$ $\infty$ $\infty$ }	3	2	2	2

Antal uafhængige komponenter for forskellige symmetrigrupper.

---

APPENDIX I. RELATIONER MELLEM HOVEDINVARIANTER OG  
EGENVÆRDIER

For en symmetrisk tensor af anden orden  $a_l^k = a_k^l$  bestemmes hovedinvarianterne ved

$$\begin{aligned} I_a &= I = a_k^k \\ II_a &= II = \frac{1}{2} e^{klm} e_{pqm} a_k^p a_l^q \\ III_a &= III = \frac{1}{6} e^{klm} e_{pqr} a_k^p a_l^q a_m^r \end{aligned} \quad (I.1)$$

Udtrykt ved egenverdierne  $a_1, a_2$  og  $a_3$  har man

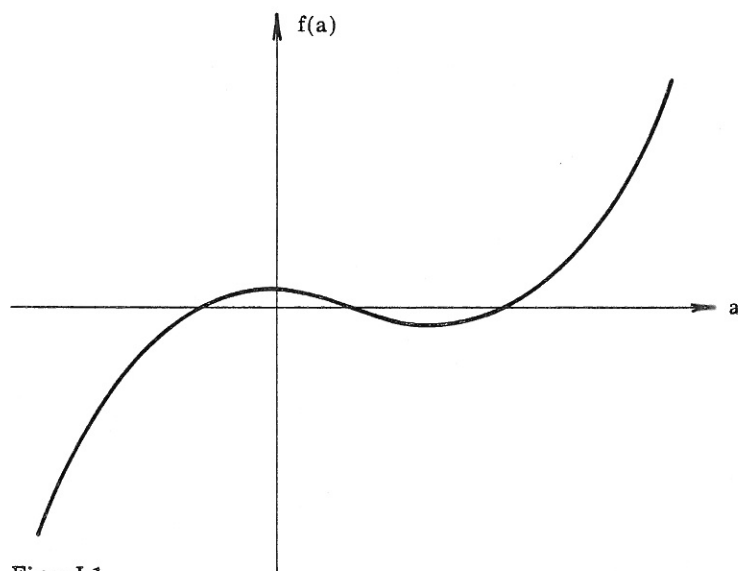
$$\begin{aligned} I &= a_1 + a_2 + a_3 \\ II &= a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \\ III &= a_1 a_2 a_3 \end{aligned} \quad (I.2)$$

Yderligere har man, at følgende relationer gælder

$$\begin{aligned} I^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2II = I_a + 2II \\ I II &= (a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1) + (a_1^2 a_3 + a_3^2 a_2 + a_2^2 a_1) + 3III \\ I^3 &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3I II - 3III = I_a + 3I II - 3III \\ II^2 &= a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2 + 2I III \\ II^3 &= a_1^3 a_2^3 + a_2^3 a_3^3 + a_3^3 a_1^3 - 3III^2 + 3I II III \\ I^2 II^2 - 2II^3 + 6I II III - 2I^3 III - 9III^2 &= \\ &= (a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1)^2 + (a_1^2 a_3 + a_3^2 a_2 + a_2^2 a_1)^2 \\ I^3 III - 6I II III + II^3 + 9III^2 &= \\ &= (a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1)(a_1^2 a_3 + a_3^2 a_2 + a_2^2 a_1) \end{aligned} \quad (I.3)$$

Egenverdierne bestemmes af trediegradsligningen

$$-a^3 + Ia^2 - IIa + III = 0 \quad (I.4)$$



Figur I.1

Oftes ved man, at egenverdierne er reelle, hvilket lægger visse bånd på hovedinvarianterne. Disse bånd kan bestemmes på følgende måde. En funktion af  $a$  defineres ved

$$f(a) = a^3 - Ia^2 + IIa - III \quad (I.5)$$

Grafen af denne funktion, i det tilfælde hvor den har 3 reelle rødder, er vist i figur I.1. Det ses, at der eksisterer et lokalt maximum og et lokalt minimum, hvor

$$df/da = 3a^2 - 2Ia + II = 0 \quad (I.6)$$

dvs. for

$$a = \frac{1}{3} (I \pm \sqrt{I^2 - 3II})$$

som, når de 2 værdier af  $a$  skal være reelle, kræver

$$0 \leq I^2 - 3II \quad (I.7)$$

Når 3 reelle rødder eksisterer, skal

$$0 \leq f((I - \sqrt{I^2 - 3II})/3) \quad \text{og} \quad f((I + \sqrt{I^2 - 3II})/3) \leq 0 \quad (I.8)$$

hvilket kan omskrives til

$$0 \leq -2I^3 + 9I II + 2(I^2 - 3II)^{\frac{3}{2}} - 27III \quad (I.9)$$

og

$$-2I^3 + 9I II - 2(I^2 - 3II)^{\frac{3}{2}} - 27III \leq 0 \quad (I.10)$$

De tre betingelser (I.7), (I.9) og (I.10) kan samles i

$$0 \leq (2I^3 - 9I \text{ II} + 27\text{III})^2 \leq 4(I^2 - 3\text{II})^3 \quad (\text{I.11})$$

I det plane tilfælde er  $a_3 = 0$  og  $\text{III} = 0$ . Betingelsen for, at der eksisterer 2 reelle egenverdier bliver, at rødderne i

$$a^2 - Ia + \text{II} = 0 \quad (\text{I.12})$$

er reelle, dvs.

$$0 \leq I^2 - 4\text{II} \quad (\text{I.13})$$



---

RESUME - SUMMARY

I en historisk oversigt omtales udviklingen af konstitutive ligninger, brud- og flydebetingelser for anisotrope materialer. Der gøres rede for, hvorledes såvel lineære som ikke-lineære materialeegenskaber kan beskrives under hensyn til de forskellige former for symmetri, som anisotrope materialer kan være i besiddelse af. Inden for den lineære elasticitetsteoris rammer omtales forskellene mellem isotrope og anisotrope skivers deformationer, anvendelse af kompleks funktionsteori til løsning af plane problemer samt nogle resultater fra en numerisk løsningsmetode. Specielt for armerede materialer behandles opstilling af konstitutive ligninger for lineærelastiske kompositmaterialer og opstilling af brud- og flydebetingelser for armerede v. Mises- og Coulomb-materialer. Endelig gives en kort omtale af ideale fiberarmerede materialer.

In a historical survey the development of constitutive equations and criteria for brittle fracture and yielding of anisotropic materials is sketched. Both linear and non-linear material properties are described in a way reflecting the different types of symmetry that anisotropic materials may possess. Differences in the behaviour of isotropic and anisotropic materials in a plane state of stress are discussed as is also the use of complex variables in solving problems of two-dimensional linear elasticity. Some results from a numerical solution of the equations governing plane, linear elasticity are given. The theory of constitutive equations for reinforced materials, in particular for composites having a linear stress-strain relationship, is considered and criteria for yielding of reinforced v. Mises- and Coulomb-materials are proposed. Finally, ideal fibre-reinforced materials are briefly mentioned.

---

LITTERATURFORTEGNELSE

Den litteratur, til hvilken der refereres i teksten, er i fortegnelsen forsynet med en angivelse af de sider, fra hvilke der refereres. Fortegnelsen omfatter også anden litteratur, som har interesse i forbindelse med emnet Anisotrope Materialer.

- 1669.01 Steno, Nicolaus: De Solido intra Solidum Naturaliter Contento Dissertationis Prodrumus, Firenze. Dansk oversættelse af A. Krog & V. Maar: Foreløbig Meddelelse til en Afhandling om Faste Legemer, der findes naturlig indlejrede i andre faste Legemer, Gyldendal, København, 1902, pp. XII + 106. (1)
- 1776.01 Coulomb, C. A.: Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatif à l'Architecture. Mémoires . . . . ., par divers Savans, pp. 343 - 382, Paris. (67)
- 1823.01 Cauchy, A.-L.: Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. Bull. Soc. Philomath., pp. 9-13. (1)
- 1827.01 Navier, C.-L.-M.-H.: Mémoires sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. Mém. Acad. Sci. Inst. France, 7, pp. 375 - 393. (1)
- 1828.01 Cauchy, A.-L.: Exercices de mathématique, Vol. 3. (1)
- 1829.01 Savart, F.: Annales de Chimie, Tom. 40. (Forkortet udgave af [1830.02]). (2)
- 1830.01 Hessel, J. F. C.: Gehlers Physikalisches Wörterbuch, Bd. 5, pp. 1023 - (1)
- 2 Savart, F.: Recherche sur l'élasticité des corps qui cristallisent régulièrement. Mem. de l'Académie de France, Tom. IX, Paris.
- 1839.01 Green, G.: On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the common surface of two non-crystallized media. Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. VII, pp. 1 - 24. (1)
- 1842.01 Hagen, G. H. L.: Die Elastizität des Holzes. Bericht der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften, Berlin, pp. 316 - 319. (2)
- 1864.01 Saint-Venant, A.-J.-C. B. de: i hans udgave af Naviers »De la Resistance des Corps Solides», Paris. (2, 104)
- 1886.01 Todhunter, I. & Pearson, K.: A History of the Theory of Elasticity, Vol. 1. Dover Publications Inc., New York, 1960, pp. 936.

- 1887.01 Voigt, W.: Ann. Phys. Chem., Bd. 31. (1)
- 1888.01 Voigt, W.: Ann. Phys. Chem., Bd. 34, 35. (1)
- 1889.01 Voigt, W.: Ann. Phys. Chem., Bd. 38. (1)
- 1893.01 Todhunter, I. & Pearson, K.: A History of the Theory of Elasticity, Vol. II, Part I, pp. 762. Vol. II, Part II, pp. 546. Dover Publications, Inc., New York, 1960.
- 1894.01 Finger, J.: Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aeotropen und isotropen Substanzen. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Math. - Nat. Classe CIIL. Bd., Abt. IIa, pp. 1073 - 1100. (24)
- 1901.01 Gibbs, J. Willard & Wilson, Edwin Bidwell: Vector Analysis. Dover Publications 1960 (reprint 2. udg. 1909), 436 sider. (5)
- 06.01 Cesàro, E.: Sulle formole del Volterra, fondamentale nella teoria delle distorsioni elastiche. Rend. Accad. Napoli (3a) 12, pp. 311 - 321. (104)
- 09.01 Jacoby, H. S.: Structural Details or Elements of Design in Heavy Framing. Wiley. (2, 83).
- 10.01 Voigt, W.: Lehrbuch der Kristallphysik. Teubner, Berlin, 2. udg. 1928. (67)
- 12.01 Howe, M. A.: Engineering News. (2)
- 13.01 v. Mises, R.: Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Nachr. Königl. Gesellschaft Wiss. Göttingen. Math.- Phys. Kl., pp. 582 - 592. (67)
- 14.01 Huber, M. T.: Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Vol. 66, no. 30, pp. 557 - 564. (2)
- 19.01 Suenson, E.: Jærnbetonarmering under en Vinkel med Normal-kraftens Retning. Ingeniøren, 28. Aarg., pp. 422 - 428. (2)
- 20.01 Ayres, Q. C.: Crushing Strength of Southern Pine at Angles to Grain. Engng. News-Record, Vol. 85, pp. 653 - 654.
- 2 Simpson, T. R.: Inclined-Bearing Tests on Douglas Fir and White Pine. Engng. News-Record, Vol. 85, pp. 654 - 655.
- 3 Dewell, H. D.: Jacoby Formula for Inclined Bearing Recommended for Coniferous Woods. Engng. News-Record, Vol. 85, p. 811.
- 4 Martel, R. R.: Tests of Bearing Strength of Redwood Agree with Howe's Formula. Engng. News-Record, Vol. 85, p. 959.
- 5 Haigh, B. P.: The Strain-Energy Function and the Elastic Limit. Engineering, Vol. 109, pp. 158 - 160. (68)
- 6 Westergaard, H. M.: On the Resistance of Ductile Materials to Combined Stresses. J. Franklin Inst., Vol. 189, pp. 627 - 640. (68)

- 21.01 Hankinson, R. L.: Investigation of crushing strength of spruce at varying angles of grain. Air Service Information Circular, Vol. III, No. 259, pp. 1 - 15. (2, 84)
- 2 Ingerslev, Aa.: Om en elementær Beregningsmaade af krydsarmerede Plader. Ingeniøren, 30. Aarg., pp. 507 - 515. (2)
- 22.01 Suenson, E.: Eisenbetonbewehrung unter einem Winkel mit der Richtung der Normalkraft. Beton u. Eisen, XXI. Jg., pp. 145 - 149.
- 2 Baumann, R.: Die bisherigen Ergebnisse der Holzprüfungen in der Materialprüfungsanstalt an der Technische Hochschule Stuttgart, VDI-Forschungsarbeiten, Berlin. (2)
- 23.01 Leitz, H.: Eisenbewehrte Platten bei allgemeinen Biegunszuständen. Die Bautechnik, Bd. 1, pp. 155 - 157, pp. 163 - 167 (2)
- 2 Ingerslev, A.: The Strength of Rectangular Slabs. Journal of the Institution of Structural Engineers, Vol. 1, pp. 3 - 14.
- 25.01 Bekhterev, P.: An Analytic Investigation of the Generalized Hooke's Law, Parts 1 and 2, Leningrad. (2)
- 26.01 Leitz, H.: Ueber die Anwendung der Elastizitätstheorie auf kreuzweise bewehrten Beton. Beton u. Eisen, Bd. 25, pp. 240 - 245. (2)
- 2 Leitz, H.: Zur Anisotropie kreuzweise bewehrten Betons, ZAMM, Bd. 6, pp. 225 - 228. (2)
- 3 Huber, M. T.: Einige Anwendungen der Biegungstheorie orthotroper Platten, ZAMM, Bd. 6, pp. 228 - 231.
- 27.01 Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition, Dover Publ., 1944. 643 sider. (2, 18)
- 2 Auerbach, F.: Elastizität der Kristalle i Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik (F. Auerbach & W. Hort), Bd. III, Leipzig, pp. 239 - 282. (2)
- 28.01 Geckeler, J. W.: Elastizitätstheorie anisotroper Körper. (Kristall-elastizität). Handbuch der Physik, Band VI (Red. R. Grammel) (2)
- 2 Lagally, M.: Vektor-Rechnung, 358 sider. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig. (5)
- 3 Osgood, W. R.: Compressive Stress on Wood Surfaces Inclined to the Grain. Engng. News-Record, Vol. 100, pp. 243 - 244.
- 4 v. Mises, R.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. ZAMM, Bd. 8, pp. 161 - 185. (2, 24, 67)
- 29.01 Reuss, A.: Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. ZAMM, Bd. 9, pp. 49 - 58. (67)
- 30.01 Leitz, H.: Bewehrung von Scheiben und Platten, Erster Internationaler Kongress für Beton und Eisenbeton. (2)

- 31.01 Jeffreys, H.: Cartesian Tensors. Cambridge, reprinted 1965, 93 sider. (5)
- 2 McConnell, A. J.: Applications of Tensor Analysis, reprinted, Dover 1957, 318 sider.
- 3 Hörig, H.: Zur Elastizität des Fichtenholzes. Z. techn. Physik, 12. Jg., pp. 369 - 379.
- 4 Johansen, K. W.: Beregning af krydsarmerede Jernbetonpladers Brudmoment. Bygningsstatistiske Meddelelser, 3. årg., pp. 1 - 18. (2)
- 34.01 Hermann, C.: Tensoren und Kristallsymmetrie. Zeitschr. f. Kristallographie, 89. Bd., pp. 32 - 48. (11)
- 2 Kollman, F.: Die Abhängigkeit der Festigkeit und der Dehnungszahl der Hölzer vom Faserverlauf. Der Bauingenieur, 15. Jahrg., pp. 198 - 200.
- 35.01 Wolf, K.: Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material. ZAMM, Bd. 15, pp. 249 - 254.
- 2 Stamer, J.: Elastizitätsuntersuchungen an Hölzern. Ing.-Arch., Bd VI, pp. 1 - 8.
- 3 Hörig, H.: Anwendung der Elastizitätstheorie anisotroper Körper auf Messungen an Holz. Ing.-Arch., Bd. VI, pp. 8 - 14.
- 37.01 Murnaghan, F. D.: Finite Deformations of an Elastic Solid. American Journal of Mathematics, bd. 59, pp. 235 - 260.
- 38.01 Murnaghan, F. D.: The Theory of Group Representations. Dover Publications, Inc, New York, pp. 1 - 369. J. Hopkins Press, 1938.
- 39.01 Norris, C. B.: The Elastic Theory of Wood Failure. Transactions ASME, Vol. 61, pp. 259 - 261.
- 40.01 Mooney, M.: A Theory of Large Elastic Deformation. J. Appl. Phys., Vol. 11, pp. 582 - 592.
- 45.01 Reiner, M.: A Mathematical Theory of Dilatancy. Am. J. Math., Vol. 67, pp. 350 - 362. (24)
- 2 Prager, W.: Strain Hardening under Combined Stresses. J. Appl. Phys., Vol. 16, pp. 837 - 840. (24)
- 3 Stüssi, F.: Zum Einfluss der Faserrichtung auf die Festigkeit und den Elastizitätsmodul von Holz. Schweizerische Bauzeitung, Bd. 126, pp. 247 - 248.
- 46.01 Stüssi, F.: Holzfestigkeit bei Beanspruchung schräg zur Faser. Schweizerische Bauzeitung, Bd. 128, pp. 251 - 252. (84)
- 47.01 Birch, F.: Finite Elastic Strain of Cubic Crystals. Physical Review, Vol. 71, pp. 809 - 824.

- 48.01 Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. I. Fundamental Concepts. Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 240, A, pp. 459 - 490. (118)
- 2 Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. II. Some Uniqueness Theorems for Pure, Homogeneous Deformation. Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 240, A, pp. 491 - 508. (118)
- 3 Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. III. Some Simple Problems in Cylindrical Polar Co-ordinates. Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 240, A, pp. 509 - 525. (118)
- 4 Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. IV. Further Developments of the General Theory. Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 241, A, pp. 379 - 397. (118)
- 5 Todd, J. A.: Ternary Quadratic Types. Phil. Trans., Vol. 241, pp. 399 - 456.
- 6 Reiner, M.: Elasticity beyond the Elastic Limit. Am. J. Math., Vol. 70, pp. 433 - 446.
- 7 Richter, H.: Das isotrope Elastizitätsgesetz. ZAMM, Bd. 28, pp. 205 - 209.
- 8 Hill, R.: A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. Proc. Roy. Soc., A, Vol. 193, pp. 281 - 297. (67, 84)
- 9 Rivlin, R. S.: The hydrodynamics of non-Newtonian fluids. Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 193, pp. 260 - 281.
- 10 Hearmon, R. F. S.: The Elasticity of Wood and Plywood. Forest Products Research, Special Report No. 7, London, pp. 1 - 87.
- 49.01 Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. V. The problem of flexure. Proc. Roy. Soc., A, Vol. 195, pp. 463 - 473. (118)
- 2 Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. Phil. Trans. Roy. Soc., A, Vol. 242, pp. 173 - 195. (118)
- 50.01 Lekhnitskii, S. G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. Holden-Day, San Francisco, 1963, pp. 404. (44, 47)
- 2 Hill, R.: The mathematical theory of plasticity. Oxford, reprinted 1964. 355 sider.
- 3 Oldroyd, J. G.: On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A., Vol. 200, pp. 523 - 541.
- 51.01 Rivlin, R. S. & Saunders, D. W.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments on the deformation of rubber. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. 243, pp. 251 - 288. (118)
- 2 Rivlin, R. S. & Thomas, A. G.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VIII. Strain distribution around a hole in a sheet. Phil. Trans. Roy. Soc., London, Vol. 243, A, pp. 289 - 298. (118)
- 3 Murnaghan, F. D.: Finite Deformation of an Elastic Solid. John Wiley & Sons, Inc., New York. Reprint: Dover Publ., NY, 1967, 140 sider.

- 51.04 Timoshenko, S. & Goodier, J. N.: *Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York. 506 sider. (122)
- 5 Savin, G. N.: *Stress Concentration around Holes*. Pergamon Press Ltd., New York, 1961, 430 sider.
- 52.01 Fumi, F. G.: *Physical Properties of Crystals: The Direct-Inspection Method*. *Acta Cryst.*, Vol. 5, pp. 44 - 48.
- 2 Fumi, F. G.: The direct-inspection method in systems with a principal axis of symmetry. *Acta Cryst.*, Vol. 5, pp. 691 - 694.
- 3 Fumi, F. G.: Matter Tensors in Symmetrical Systems. *Il Nuovo Cimento*, Vol. 9, pp. 739 - 756.
- 4 Wondratschek, H.: Über Tensorsymmetrien in den einzelnen Kristallklassen. *N. Jahrbuch f. Mineralogie, Mh.*, pp. 217 - 234
- 5 Stephens, K. M.: A boundary problem in orthotropic generalized plane stress. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 5, pp. 206 - 220.
- 6 Williams, M. L.: Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. *J. Appl. Mech.*, Vol. 19, pp. 526 - 528.
- 7 Hill, R.: The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate. *Proc. Phys. Soc., London*, Vol. A65, pp. 349-354.
- 53.01 Fieschi, R. & Fumi, F. G.: High-order Matter Tensors in Symmetrical Systems. *Il Nuovo Cimento*, Vol. X, pp. 865 - 882.
- 2 Wondratschek, H.: Über Tensorsymmetrien in den Klassen des hexagonalen und rhomboedrischen Systems und in isotropen Medien. *N. Jb. Min. Mh., Jahrg. 1953*, pp. 25 - 34.
- 54.01 Ericksen, J. L. & Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformation of Homogeneous Anisotropic Materials. *J. Rat. Mech. Anal.*, 3. pp. 281 - 301. (24)
- 2 Green, A. E. & Zerna, W.: *Theoretical Elasticity*. Oxford, Clarendon Press (repr. 1963). 442 sider. (44)
- 3 Ericksen, J. L.: Deformations Possible in Every Isotropic, Incompressible, Perfectly Elastic Body. *ZAMP*, Vol. V., pp. 466 - 489. (118)
- 4 Green, A. E. & Wilkes, E. W.: Finite Plane Strain for Orthotropic Bodies. *J. Rational Mech. Anal.*, Vol. 3, pp. 713 - 723.
- 5 Muskhelishvili, N. I.: *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1963. 718 sider. (44)
- 55.01 Adkins, J. E. & Rivlin, R. S.: Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. X. Reinforcement by Inextensible Cords. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Vol. 248, A, pp. 201 - 223. (89)
- 2 Noll, W.: On the Continuity of the Solid and Fluid States. *J. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 4, pp. 3 - 81.
- 3 Rivlin, R. S.: Plane Strain of a Net Formed by Inextensible Cords. *J. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 4, pp. 951 - 974. (89)

- 55.04 Jagodzinski, H.: *Kristallographie. Handbuch der Physik*, Bd. VII/1 (ed. S. Flügge), pp. 1 - 103.
- 5 Ericksen, J. L.: Deformations Possible in Every Compressible, Isotropic Perfectly Elastic Material. *J. Math. Phys.* Vol. 34, pp. 126 - 128. (118)
- 6 Rivlin, R. S. & Ericksen, J. L.: Stress-Deformation Relations for Isotropic Materials. *J. Rational Mech. Anal.*, Vol. 4, pp. 323 - 425. (24)
- 56.01 Lekhnitskii, S. G.: *Anisotropic Plates*. 2nd ed. Gordon & Breach, New York, 1958. 534 sider. (44)
- 2 Adkins, J. E.: Cylindrically Symmetrical Deformations of Incompressible Elastic Materials Reinforced with Inextensible Cords. *J. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 5, pp. 189 - 202. (89)
- 3 Sokolnikoff, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill. 476 sider.
- 4 Williams, M. L.: The Complex-Variable Approach to Stress Singularities - II. *J. Appl. Mech.*, Vol. 23, pp. 477 - 478.
- 5 Duff, G. F. D.: *Partial Differential Equations*. University of Toronto Press, Toronto, pp. 1 - 248.
- 6 Adkins, J. E.: Finite Plane Deformation of Thin Elastic Sheets Reinforced with Inextensible Cords. *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, Vol. 249, A, pp. 125 - 150.
- 57.01 Smith, G. F. & Rivlin, R. S.: The Anisotropic Tensors. *Quart. Appl. Math.*, Vol. 15, pp. 308 - 314. (24)
- 2 Green, A. E. & Rivlin, R. S.: The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory, Part I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 1, pp. 1 - 21. (24)  
Correction: Vol. 1, p. 470.
- 3 Smith, G. F. & Rivlin, R. S.: Stress-Deformation Relations for Anisotropic Solids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 1. pp. 107 - 112. (24)
- 4 Nye, J. F.: *Physical Properties of Crystals*. Oxford, At the Clarendon Press, 322 sider. (4)
- 5 Doyle, T. C.: Higher Order Invariants of Stress or Deformation Tensors. *J. Math. Phys.*, Vol. XXXVI, pp. 297 - 305.
- 6 Washizu, K.: A Note on the Conditions of Compatibility. *J. Math. Phys.*, Vol. XXXVI, pp. 306 - 312. (104)
- 7 Marin, J.: Theories of Strength for Combined Stresses and Non-isotropic Materials. *J. Aeronautical Sciences*, Vol. 24, pp. 265 - 268 + 274.
- 58.01 Smith, G. F. & Rivlin, R. S.: The Strain-Energy Function for Anisotropic Elastic Materials. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 88, May, pp. 175 - 193. (24)



- 58.02 Noll, W.: A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 2, pp. 197 - 226.
- 3 Döring, W.: Die Richtungsabhängigkeit der Kristallenergie. Annalen der Physik, 7. Folge, pp. 102 - 109.
- 59.01 Spencer, A. J. M. & Rivlin, R. S.: The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 2, pp. 309 - 336.
- 2 Spencer, A. J. M. & Rivlin, R. S.: Finite Integrity Bases for Five or Fewer Symmetric  $3 \times 3$  Matrices. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 2, pp. 435 - 446.
- 3 Schniewind, A. P.: Transverse Anisotropy of Wood: A Function of Gross Anatomic Structure. Forest Products Journal, Vol. 9, pp. 350 - 359.
- 4 Truesdell, C.: Invariant and Complete Stress Functions for General Continua. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 4, pp. 1 - 29. (110)
- 60.01 Truesdell, C. & Toupin, R. A.: The Classical Field Theories i Handbuch der Physik, Vol. III/1. (Ed. S. Flügge). Springer, Berlin, pp. 226 - 793. (105)
- 2 Green, A. E. & Adkins, J. E.: Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics. Oxford 1960, 348 sider. (89)
- 3 Rivlin, R. S.: Some Topics in Finite Elasticity i »Structural Mechanics» (ed. Goodier, J. N. & Hoff, N. J.). Pergamon Press, Oxford, pp. 169 - 198.
- 4 Spencer, A. J. M. & Rivlin, R. S.: Further Results in the Theory of Matrix Polynomials. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 4, pp. 214 - 230.
- 5 Sirotnin, Yu. I.: Anisotropic Tensors. Soviet Physics Doklady (DAN), Vol. 5, pp. 774 - 777.
- 6 Smith, G. F.: On the Minimality of Integrity Bases for Symmetric  $3 \times 3$  Matrices. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 5, pp. 382 - 389.
- 7 Paul, B.: Prediction of Elastic Constants of Multiphase Materials. Trans. Met. Soc. AIME, Vol. 218, pp. 36 - 41. (67)
- 8 Adkins, J. E.: Symmetry Relations for Orthotropic and Transversely Isotropic Materials. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 4, pp. 193 - 213.
- 9 Ericksen, J. L.: Tensor Fields i Handbuch der Physik, Bd. III/1, pp. 794 - 858. (ed. S. Flügge). Springer-Verlag, Berlin. (18)
- 10 Adkins, J. E.: Further Symmetry Relations for Transversely Isotropic Materials. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 5, pp. 263 - 274.

- 61.01 Hearmon, R. F. S.: An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity. Oxford University Press.
- 2 Rivlin, R. S.: Constitutive Equations Involving Functional Dependence of One Vector on Another. *ZAMP*, Vol. XII, pp. 447 - 452.
  - 3 Stowell, E. Z. & Liu, T. S.: On the mechanical behaviour of fibre-reinforced crystalline materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 9, pp. 242 - 260.
  - 4 Sirotnin, Yu. I.: Plotting tensors of a given symmetry. *Soviet Physics-Cryst.*, Vol. 6, pp. 263 - 271.
- 62.01 Spencer, A. J. M. & Rivlin, R. S.: Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second-Order Tensors, Part I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 9, pp. 45 - 63.
- 2 Smith, G. F.: On the Yield Condition for Anisotropic Materials. *Q. Appl. Meth.*, Vol. XX, pp. 241 - 247.
  - 3 Smith, G. F.: Further Results on the Strain-Energy Function for Anisotropic Elastic Materials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 10, pp. 108 - 118. (39)
  - 4 Hashin, Z. & Shtrikman, S.: On some Variational Principles in Anisotropic and Nonhomogeneous Elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 10, pp. 335 - 342. (67)
  - 5 Hashin, Z. & Shtrikman, S.: A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 10, pp. 343 - 352. (67)
  - 6 Norris, C. B.: Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses. Forest Products Laboratory, Report No. 1816, pp. 1 - 39.
  - 7 Dong, S. B., Pister, K. S. & Taylor, R. L.: On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates. *J. Aerospace Sci.*, Vol. 29, pp. 969 - 975.
  - 8 Adkins, J. E.: Syzygies Relating the Invariants for Transversely Isotropic Materials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 11, pp. 357 - 367.
  - 9 Nielsen, M. P.: Plasticitetsteorien for Jernbetonplader, København, pp. 1 - 180.
- 63.01 Thoft-Christensen, P.: Plasticitetsteoriens Fysiske Love, 1 & 2, København 1963, 404 sider. (68)
- 2 Lokhin, V. V. & Sedov, L. I.: Nonlinear Tensor Functions of Several Tensor Arguments. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, Vol. 27, pp. 597 - 629. (20)
  - 3 Pipkin, A. C. & Wineman, A. S.: Material Symmetry Restrictions on Non-Polynomial Constitutive Equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 12, pp. 420 - 426. (24)

- 63.04 Smith, G. F., Smith, M. M. & Rivlin, R. S.: Integrity Bases for a Symmetric Tensor and a Vector - The Crystal Classes. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 12, pp. 93 - 133.
- 5 Gurtin, M. E.: A Note on the Principle of Minimum Potential Energy for Linear Anisotropic Elastic Solids. Q. Appl. Math., Vol. XX, pp. 379 - 382.
- 6 Ivlev, D. D.: Theory of complex media. Soviet Physics Doklady (DAN), Vol. 8, pp. 28 - 30.
- 7 Lokhin, V. V.: A system of defining parameters characterizing the geometrical properties of an anisotropic medium. Soviet Physics Doklady, (DAN), Vol. 8, pp. 260 - 261.
- 8 Sedov, L. I. & Lokhin, V. V.: Description of point groups of symmetry with the help of tensors. Soviet Physics Doklady, (DAN), Vol. 8, pp. 344, 352 - 353.
- 9 Lokhin, V. V.: General forms of the relations between tensor fields in an anisotropic continuous medium, the properties of which are described by vectors, tensors of the second rank, and antisymmetric tensors of the third rank. Soviet Physics Doklady, (DAN), Vol. 8, pp. 345 - 348.
- 10 Rogers, T. G. & Pipkin, A. C.: Asymmetric Relaxation and Compliance Matrices in Linear Viscoelasticity. ZAMP, Vol. 14, pp. 334 - 343.
- 11 Weigler, H. & Becker, G.: Untersuchungen über das Bruch- und Verformungsverhalten von Beton bei zweiachsiger Beanspruchung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, 66 sider.
- 12 Benthem, J. P.: On the stress distribution in anisotropic infinite wedges. Q. Appl. Math., Vol. 21, pp. 189 - 198.
- 13 Hashin, Z. & Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 11, pp. 127 - 140. (67)
- 14 Hill, R.: Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 11, pp. 357 - 372.
- 15 Morley, L. S. D.: Skew Plates and Structures. The Macmillan Company, New York, 128 sider.
- 16 Nielsen, M. P.: Flydebetingelser for jernbetonplader. Nordisk Betong, Vol. 7, pp. 61 - 82.
- 64.01 Coleman, B. D. & Noll, W.: Material Symmetry and Thermodynamic Inequalities in Finite Elastic Deformations. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 15, pp. 87 - 111. Reprinted in The Foundations of Mechanics and Thermodynamics Selected Papers by W. Noll. Springer, 1974.
- 2 Wineman, A. S. & Pipkin, A. C.: Material Symmetry Restrictions on Constitutive Equations. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 17, pp. 184 - 214. (24)

- 64.03 Hashin, Z. & Rosen, B. W.: The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials. *J. Appl. Mech.*, Vol. 31, pp. 223 - 232. (67)
- 4 Smith, G. F. & Rivlin, R. S.: Integrity Bases for Vectors - The Crystal Classes. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 15, pp. 169 - 221. (20)
- 5 Hill, R.: Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I: Elastic behaviour, pp. 199 - 212. II: Inelastic behaviour, pp. 213 - 218. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 12. (67)
- 6 Kuyt, B.: Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken. *Beton- und Stahlbetonbau*, 59. Jg., pp. 158 - 163.
- 7 Rivlin, R. S.: Networks of Inextensible Cords i Nonlinear Problems of Engineering, ed. W. F. Ames, Academic Press, New York, pp. 51 - 64.
- 8 Rosen, B. W.: Tensile Failure of Fibrous Composites. *AIAA Journal*, Vol. 2, pp. 1985 - 1991.
- 9 Nielsen, M. P.: Yield Conditions for Reinforced Concrete Shells in the Membrane State i »Non-Classical Shell Problems», *Proc. IASS Symposium*, North-Holland Publ. Co., pp.1030-1040. (80)
- 10 Krenchel, H.: Fibre Reinforcement. Akademisk Forlag, København, pp. 1 - 159.
- 65.01 Truesdell, C. & Noll, W.: The Non-Linear Field Theories of Mechanics i *Handbuch der Physik*, Vol. III/3 (ed. S. Flügge), Springer, Berlin, 602 sider. (119)
- 2 Spencer, A. J. M.: Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second-Order Tensors, Part II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 18, pp. 51 - 82.
- 3 Green, A. E. & Naghdi, P. M.: A General Theory of an Elastic-Plastic Continuum. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 18, pp. 251 - 281.
- 4 Smith, G. F.: On Isotropic Integrity Bases. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 18, pp. 282 - 292.
- 5 Hashin, Z.: On Elastic Behaviour of Fibre Reinforced Materials of Arbitrary Transverse Phase Geometry. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 119 - 134. (67)
- 6 Spencer, A. J. M.: A Theory of the Failure of Ductile Materials Reinforced by Elastic Fibres. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 7, pp. 197 - 209.
- 7 Kemp, K. O.: The Yield Criterion for Orthotropically Reinforced Concrete Slabs. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 7, pp. 737 - 746.
- 8 Singh, M. & Pipkin, A. C.: Note on Ericksen's Problem. *ZAMP*, Vol. 16, pp. 706 - 709.
- 9 Kelly, A. & Davies, G. J.: The principles of the fibre reinforcement of metals. *Metallurgical Reviews*, Vol. 10, pp. 1 - 77.

- 65.10 Kelly, A. & Tyson, W. R.: Tensile properties of fibre-reinforced metals: Copper/Tungsten and Copper/Molybdenum. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 329 - 350.
- 11 Hill, R.: Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials - III. Self-consistent model. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 189 - 198. (67)
- 12 Azzi, V. D. & Tsai, S. W.: Anisotropic Strength of Composites. *Exp. Mech.*, Vol. 5, pp. 283 - 288. (85)
- 13 Bolotin, V. V.: Basic Equations of the Theory of Reinforced Media. *Polymer Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 23 - 30.
- 14 Goldenblat, I. I. & Kopnov, V. A.: Strength of Glass-Reinforced Plastics in the Complex Stress State. *Polymer Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 54 - 59.
- 15 Ashkenazi, E. K.: Problems of the Anisotropy of Strength. *Polymer Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 60 - 70.
- 66.01 Klingbeil, W. W. & Shield, R. T.: On a Class of Solutions in Plane Finite Elasticity. *ZAMP*, Vol. 17, pp. 489 - 511.
- 2 Morley, C. T.: On the Yield Criterion of an Orthogonally Reinforced Concrete Clab Element. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 14, pp. 33 - 47.
- 3 Jackson, P. W. & Cratchley, D.: The Effect of Fibre Orientation on the Tensile Strength of Fibre-reinforced Metals. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 14, pp. 49 - 64.
- 4 Cooper, G. A.: Orientation Effects in Fibre-reinforced Metals. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 14, pp. 103 - 111.
- 5 Willis, J. R.: Hertzian Contact of Anisotropic Bodies. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 14, pp. 163 - 176.
- 6 Greszczuk, L. B.: Effect of Material Orthotropy on the Directions of Principal Stresses and Strains i »Orientation Effects in the Mechanical Behavior of Anisotropic Structural Materials». *ASTM STP 405*, pp. 1 - 13.
- 7 Whitney, J. M. & Riley, M. B.: Elastic Properties of Fiber Reinforced Composite Materials. *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 1537 - 1542.
- 8 Holister, G. S. & Thomas, C.: Fibre Reinforced Materials. Elsevier Publ. Co., Amsterdam, pp. 1 - 154.
- 9 Fosdick, R. L.: Remarks on Compatibility i »Modern Developments in the Mechanics of Continua» (ed. Salamon Eskinazi), Academic Press, New York, pp. 109 - 127. (105)
- 10 Tsai, W. W. & Azzi, V. D.: Strength of Laminated Composite Materials. *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 296 - 301.
- 11 Tsai, S. W., Adams, D. F. & Doner, D. R.: Analysis of Composite Structures. *NASA CR-620*, pp. 1 - 218. (85, 89)

- 67.01 Nielsen, M. P.: Om forskydningsarmering af jernbetonbjælker. Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. 38, No. 2, pp. 33 - 58.
- 2 Eringen, A. C.: Mechanics of Continua. John Wiley & Sons, Inc., 502 sider. (24)
- 3 Mulhern, J. F., Rogers, T. G. & Spencer, A. J. M.: A continuum model for fibre-reinforced plastic materials. Proc. Roy. Soc. A. 301, pp. 473 - 492. (89)
- 4 Mulhern, J. F., Rogers, T. G. & Spencer, A. J. M.: Cyclic Extension of an Elastic Fibre with an Elastic-Plastic Coating. J. Inst. Maths. Applics, Vol. 3, pp. 21 - 40.
- 5 Carroll, M. M.: Controllable deformations of incompressible simple materials. Int. J. Engng. Sci., Vol. 5, pp. 515 - 525.
- 6 Herrmann, L. R., Mason, W. E. & Chan, S. T. K.: Response of Reinforcing Wires to Compressive States of Stress. J. Composite Materials, Vol. 1, pp. 212 - 226.
- 7 Perkins, R. W.: Mechanics of Wood Deformation: Strength and Plastic Behavior of Wood. Forest Products Journal, Vol. 17, No. 4, pp. 57 - 68.
- 8 Krock, R. H. & Broutman, L. J.: Principles of Composites and Composite Reinforcement i »Modern Composite Materials» (ed. Broutman & Krock), Addison-Wesley, Reading, pp. 3 - 26.
- 68.01 Pipkin, A. C.: Controllable Viscometric Flows. Q. Appl. Math., Vol. 26, pp. 87 - 100.
- 2 Pagano, N. J. & Halpin, J. C.: Influence of End Constraint in the Testing of Anisotropic Bodies. J. Comp. Mat., Vol. 2, pp. 18 - 31. (50, 52)
- 3 Lempriere, B. M.: Poisson's Ratio in Orthotropic Materials. AIAA Journal, Vol. 6, pp. 2226 - 2227.
- 4 Halpin, J. C. & Pagano, N. J.: Observations on Linear Anisotropic Viscoelasticity. J. Comp. Mat., Vol. 2, pp. 68 - 80. (52)
- 5 Chamis, C. C. & Sendeckyj, G. P.: Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites. J. Comp. Mat., Vol. 2, pp. 332 - 358.
- 6 Schapery, R. A.: Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles. J. Comp. Mat., Vol. 2, pp. 380 - 404.
- 7 Tsai, S. W.: Strength Theories of Filamentary Structures i »Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites» (eds. R. T. Schwartz & H. S. Schwartz), John Wiley & Sons, N.Y., pp. 3 - 11. (85)
- 8 Carroll, M. M.: Finite deformations of incompressible simple solids. I. Isotropic solids, pp. 147 - 170. II. Transversely isotropic solids, pp. 269 - 278. Q. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XXI.



- 68.09 Franklin, H. G.: Classic Theories of Failure of Anisotropic Materials. *Fibre Science and Technology*, Vol. 1, pp. 137 - 150.
- 10 Wu, E. M.: Fracture Mechanics of Anisotropic Plates i »Composite Materials Workshop» (ed. Tsai, S. W., Halpin, J. C. & Pagano, N. J.), Technomic, Stamford, pp. 20 - 43.
- 11 Tsai, S. W. & Pagano, N. J.: Invariant Properties of Composite Materials i »Composite Materials Workshop» (ed. Tsai, S. W., Halpin, J. C. & Pagano, N. J.), Technomic, Stamford, pp. 233 - 253.
- 12 Fedorov, F. I.: *Theory of Elastic Waves in Crystals*. Plenum Press, New York, pp. 1 - 375.
- 13 Mendelson, A.: *Plasticity: Theory and Application*. The Macmillan Company, New York, pp. 1 - 353. (74)
- 69.01 Muki, Rokuro & Sternberg, E.: On the Diffusion of an Axial Load From an Infinite Cylindrical Bar Embedded in an Elastic Medium. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 5, pp. 587 - 605.
- 2 Mulhern, J. F., Rogers, T. C. & Spencer, A. J. M.: A Continuum Theory of a Plastic-Elastic Fibre-reinforced Material. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 7, pp. 129 - 152 (89)
- 3 Chow, E. G. W.: On the Stress-Strain Relations for all Crystal Systems. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 7, pp. 247 - 256.
- 4 Rivlin, R. S. & Smith, G. F.: Orthogonal Integrity Basis for N Symmetric Matrices i »Contributions to Mechanics» (ed. D. Abir), Pergamon, Oxford, pp. 121 - 141.
- 5 Prager, W.: Plastic failure of Fiber-Reinforced Materials. *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp. 542-- 544.
- 6 Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. & Rüsçh, H.: Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *J. Am. Concr. Inst.*, Vol. 66, pp. 656 - 666.
- 7 Fosdick, R. L. & Schuler, K. W.: On Ericksen's problem for plane deformations with uniform transverse stretch. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 7, pp. 217 - 233.
- 8 Chakrabarti, S. K. & Wainwright, W. L.: On the formulation of constitutive equations. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 7, pp. 601 - 613. (24)
- 9 Mulhern, J. F.: Cylindrically symmetric deformations of a fibre-reinforced material: *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, Vol. XXII, pp. 97 - 114.
- 10 Whitney, J. M.: Bending-Extensional Coupling in Laminated Plates under Transverse Loading. *J. Comp. Mat.*, Vol. 3, pp. 20 - 28.
- 11 Rizzo, R. R.: More on the Influence of End Constraints on Off-Axis Tensile Tests. *J. Comp. Mat.*, Vol. 3, pp. 202 - 219.

- 69.12 Whitney, J. M.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates. *J. Comp. Mat.*, Vol. 3, pp. 534 - 547.
- 13 Knowles, J. K. & Horgan, C. O.: On the exponential decay of stresses in circular elastic cylinders subject to axisymmetric self-equilibrated end loads. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 5, pp. 33 - 50.
- 14 McMillan, J. A.: Symmetry and Properties of Crystals: Theorem of Group Intersection. *Am. J. Phys.*, Vol. 37, pp. 793 - 799.
- 15 Nielsen, M. P.: Om jernbetonskivers styrke. Polyteknisk Forlag, København. 254 sider. (80, 87)
- 16 Buchmann, W.: Berechnung polarorthotroper Kreisbogenscheiben konstanter Dicke unter reiner Biegebeanspruchung. *Die Bau-technik*, 46. Jg., pp. 27 - 32.
- 17 Mandery, W. L.: Relationship Between Perpendicular Compressive Stress and Shear Strength of Wood. *Wood Science*, Vol. 1, pp. 177 - 182.
- 18 Ashton, J. E.: An Analogy for Certain Anisotropic Plates. *J. Comp. Mat.*, Vol. 3, pp. 355 - 358.
- 19 Walpole, L. J.: On the overall elastic moduli of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 17, pp. 235 - 251.
- 20 Kalandiia, A. I.: Remarks on the singularity of elastic solutions near corners. *PMM*, Vol. 33, pp. 127 - 131.
- 21 Calcote, L. R.: The Analysis of Laminated Composite Structures. Van Nostrand Reinhold Company, New York, pp. 1 - 222. (67)
- 70.01 Smith, G. E. & Spencer, A. J. M.: A Continuum Theory of a Plastic-Rigid Solid Reinforced by Two Families of Inextensible Fibres. *Q. J. Mech. Appl. Math.* Vol. XXIII, pp. 489 - 504.
- 2 Sampson, R. C.: A Stress-Optic Law for Photoelastic Analysis of Orthotropic composites. *Exp. Mech.*, Vol. 10, pp. 210 - 215.
- 3 Pipkin, A. C.: Non-linear phenomena in continua i »Non Linear Continuum Theories in Mechanics and Physics and their Applications», Coordinatore: R. S. Rivlin, Edizione Cremonese, Roma, pp. 51 - 150.
- 4 Rivlin, R. S.: An introduction to non-linear continuum mechanics i »Non Linear Continuum Theories in Mechanics and Physics and their Applications», Coordinatore: R. S. Rivlin, Edizione Cremonese, Roma, pp. 151 - 309. (35, 39)
- 5 Smith, G. F.: The generation of integrity bases i »Non Linear Continuum Theories in Mechanics and Physics and their Applications», Coordinatore: R. S. Rivlin, Edizione Cremonese, Roma, pp. 311-351.



- 70.06 Rivlin, R. S.: Red Herrings and Sundry Unidentified Fish in Non-linear Continuum Mechanics i »Inelastic Behavior of Solids» (ed. Kanninen, M. F., Adler, W. F., Rosenfield, A. R. & Jaffee, R. I.), McGraw-Hill, pp. 117 - 134.
- 7 Spencer, A. J. M.: The Static Theory of Finite Elasticity. J. Inst. Maths. Applies, Vol. 6, pp. 164 - 200.
- 8 Rogers, T. G.: Plastic Failure of Fiber-Reinforced Materials. J. Appl. Mech., Vol. 6, pp. 241 - 242.
- 9 Marris, A. W. & Shiau, J. F.: Universal Deformations in Isotropic Incompressible Hyperelastic Materials when the Deformation Tensor has Equal Proper Values. Arch. Rational. Mech. Anal., Vol. 36, pp. 136 - 160.
- 10 Smith, G. F.: On a Fundamental Error in Two Papers of C. - C. Wang »On Representations for Isotropic Functions, Parts I and II». Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 36, pp. 161 - 165.
- 11 Wang, C.-C.: A New Representation Theorem for Isotropic Functions: An Answer to Professor G. F. Smith's Criticism of my Papers on Representations for Isotropic Functions, Part I. Scalar-Valued Isotropic Functions. Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 36, pp. 166 - 197.
- 12 Part 2: Vector-Valued Isotropic Functions, Symmetric Tensor-Valued Isotropic Functions, and Skew-Symmetric Tensor-Valued Isotropic Functions, pp. 198 - 223.
- 13 Ambartsumyan, S. A.: Theory of Anisotropic Plates, Strength, Stability, Vibration. Progress in Materials Science Series, Vol. II, Technomic Publ. Co., Stamford, 248 sider.
- 14 Huang, N. C.: Yield Condition of Materials Reinforced by Fibers. J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 37, pp. 1156 - 1158.
- 15 Pagano, N. J.: Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. J. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 20 - 34.
- 16 Rizzo, F. J. & Shippy, D. J.: A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies. J. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 36 - 61.
- 17 Vicario, A. A. & Rizzo, R. R.: Effect of Length on Laminated Thin Tubes under Combined Loading. J. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 273 - 277.
- 18 Ashton, J. E. & Whitney, J. M.: Theory of Laminated Plates. Progress in Materials Science Series, Vol. IV. Technomic Publ. Co., Stamford, 153 sider.
- 19 Hashin, Z.: Theory of Composite Materials, pp. 201 - 242, i »Mechanics of Composite Materials» (ed. Wendt, F. W., Liebowitz, H. & Perrone, N.), Pergamon Press, Oxford.

- 71.01 Pipkin, A. C. & Rogers, T. G.: A mixed Boundary-value Problem for Fiber-reinforced Materials. *Q. Appl. Math.*, Vol. 29, pp. 151 - 155. (89)
- 2 Pipkin, A. C. & Rogers, T. G.: Plane Deformations of Incompressible Fiber-Reinforced Materials. *J. Appl. Mech.*, Vol. 38, pp. 1047 - 1048. (89, 96)
- 3 Rogers, T. G. & Pipkin, A. C.: Small Deflections of Fiber-Reinforced Beams or Slabs. *J. Appl. Mech.*, Vol. 38, pp. 634-640. (89)
- 4 Rogers, T. G. & Pipkin, A. C.: Finite Lateral Compression of a Fibre-Reinforced Tube. *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.*, Vol. XXIV, pp. 311 - 330.
- 5 Dally, J. W. & Prabhakaran, R.: Photo-orthotropic-elasticity. *Exp. Mech.*, Vol. 11, pp. 346 - 356.
- 6 Muki, R. & Sternberg, E.: Load-absorption by a Discontinuous Filament in a Fiber-Reinforced Composite. *ZAMP*, Vol. 22, pp. 809 - 824.
- 7 Everstine, G. C. & Pipkin, A. C.: Stress Channelling in Transversely Isotropic Elastic Composites. *ZAMP*, Vol. 22, pp. 825 - 834. (94)
- 8 Nielsen, M. P.: Introduktion til tensorregning. DIAB, Aalborg, Rapport 7102, 72 sider.
- 9 Spencer, A. J. M.: Theory of Invariants. i »Continuum Physics», Vol. I (ed. A. C. Eringen), Academic Press, New York and London, pp. 239 - 353. (24, 39)
- 10 Ishai, O.: Failure of Unidirectional Composites in Tension. *J. Engng. Mech. Div.*, Vol. 97, pp. 205 - 222.
- 11 Smith, G. F.: On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 9, pp. 899 - 916.
- 12 Behrens, E.: Elastic Constants of Fiber-Reinforced Composites with Transversely Isotropic Constituents. *J. Appl. Mech.*, Vol. 38, pp. 1062 - 1065.
- 13 Sendekyj, G. P. & Yu, Ing.-Wu: Some Exact Results in Transverse Deformation of Fiber Reinforced Composites. *J. Composite Materials*, Vol. 5, pp. 533 - 536.
- 14 Tsai, S. W. & Wu, E. M.: A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. *J. Composite Materials*, Vol. 5, pp. 58 - 80. (85)
- 15 Everstine, G. C. & Rogers, T. G.: A Theory of Machining of Fiber-Reinforced Materials. *J. Composite Materials*, Vol. 5, pp. 94 - 106.
- 16 Lou, Y. C. & Schapery, R. A.: Viscoelastic Characterization of a Nonlinear Fiber-Reinforced Plastic. *J. Composite Materials*, Vol. 5, pp. 208 - 234.
- 17 Hurlbut, C. S.: Dana's Manual of Mineralogy. John Wiley & Sons, N.Y., 18th ed., 579 sider.

- 71.18 Goodman, J. R. & Bodig, J.: Orthotropic Strength of Wood in Compression, *Wood Science*, Vol. 4, pp. 83 - 94.
- 19 Reuter, R. C.: Concise Property Transformation Relations for an Anisotropic Lamina. *J. Comp. Mat.*, Vol. 5, pp. 270 - 272.
- 20 Kafadar, C. B. & Eringen, A. C.: Micropolar Media. I - The Classical Theory, pp. 271 - 305. II - The Relativistic Theory, pp. 307 - 329. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 9.
- 21 England, A. H.: On Stress Singularities in Linear Elasticity. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 9, pp. 571 - 585.
- 22 Wang, C.-C.: Corrigendum to My Recent Papers on »Representations for Isotropic Functions«. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 43, pp. 392 - 395.
- 72.01 Spencer, A. J. M.: Plane Strain Bending of Laminated Fibre-Reinforced Plates. *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.*, Vol. XXV, pp. 387 - 400. (89)
- 2 Spencer, A. J. M.: Deformations of Fibre-Reinforced Materials. Clarendon Press, Oxford. 128 sider. (89, 91)
- 3 Prabhakaran, R. & Dally, J. W.: The Application of Photo-Orthotropic Elasticity. *J. Strain Analysis*, Vol. 7, pp. 253 - 260.
- 4 Helfinstine, J. D. & Lance, P. H.: Yielding of Fiber Reinforced Tresca Material. *J. Engng. Mech. Div.*, Vol. 98, pp. 849 - 866.
- 5 Chow, E. G. W.: Analogy Between Body Force and Inelastic Strain Gradient in All Crystal Systems. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 10, pp. 841 - 849.
- 6 Puppo, A. H. & Evensen, H. A.: Strength of Anisotropic Materials under Combined Stresses. *AIAA Journal*, Vol. 10, pp. 468 - 474.
- 7 Kao, B. & Pipkin, A. C.: Finite Buckling of Fiber-Reinforced Columns. *Acta Mechanica*, Vol. 13, pp. 265 - 280.
- 8 England, A. H.: The Stress Boundary Value Problem for Plane Strain Deformations of an Ideal Fibre-reinforced Material. *J. Inst. Maths Applies*, Vol. 9, pp. 310 - 322. (95)
- 9 Beskos, D. E.: Universal solutions for fiber-reinforced compressible isotropic elastic materials. *J. Elasticity*, Vol. 2, pp. 153 - 168. (119)
- 10 Horgan, C. O.: On Saint-Venant's principle in plane anisotropic elasticity. *J. Elasticity*, Vol. 2, pp. 169 - 180. (95)
- 11 Horgan, C. O.: Some remarks on Saint-Venant's principle for transversely isotropic composites. *J. Elasticity*, Vol. 2, pp. 335 - 339. (95)

- 72.12 Lanir, Y. & Fung, Y. C. B.: Fiber Composite Columns under Compression. *J. Comp. Mat.*, Vol. 6, pp. 387 - 401.
- 13 Schniewind, A. P. & Barrett, J. D.: Wood as a Linear Orthotropic Viscoelastic Material. *Wood Science and Technology*, Vol. 6, pp. 43 - 57.
- 14 Gillis, P. P.: Orthotropic Elastic Constants of Wood. *Wood Science and Technology*, Vol. 6, pp. 138 - 156.
- 15 Tomin, M.: Influence of Anisotropy on Fracture Toughness of Wood. *Wood Science*, Vol. 5, pp. 118 - 121.
- 16 Sendekyj, G. P.: A Brief Survey of Empirical Multiaxial Strength Criteria for Composites. *ASTM STP 497*, pp. 41 - 51. (86)
- 73.01 England, A. H. & Rogers, T. G.: Plane Crack Problems for Ideal Fibre-reinforced Materials. *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, Vol. XXVI, pp. 303 - 320. (95)
  - 2 Morland, L. W.: A plane theory of inextensible transversely isotropic elastic composites. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 9, pp. 1501 - 1518. (95)
  - 3 Everstine, G. C. & Pipkin, A. C.: Boundary Layers in Fiber-Reinforced Materials. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, Ser. E, pp. 518 - 522. (94)
  - 4 Rice, J. R.: Plane Strain Slip Line Theory for Anisotropic Rigid/Plastic Materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 21, pp. 63 - 74.
  - 5 England, A. H., Ferrier, J. E. & Thomas, J. N.: Plane Strain and Generalized Plane Stress Problems for Fibre-Reinforced Materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 21, pp. 279 - 301. (95)
  - 6 Beskos, D. E.: Universal Solutions for Fiber-reinforced Incompressible Isotropic Elastic Materials. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 9, pp. 553 - 567. (119)
  - 7 Butler, T. W. & Sullivan, jr., E. J.: On the Transverse Strength of Fiber-Reinforced Materials. *J. Appl. Mech.*, Vol. 40, pp. 523-526.
  - 8 Majumdar, S. & McLaughlin, jr., P. V.: Upper Bounds to In-Plane Shear Strength of Unidirectional Fiber-Reinforced Composites. *J. Appl. Mech.*, Vol. 40, pp. 824 - 825.
  - 9 Caddell, R. M., Raghava, R. S. & Atkins, A. G.: A yield criterion for anisotropic and pressure-dependent solids such as oriented polymers. *Journal of Materials Science*, Vol. 8, pp. 1641 - 1646. (85)
  - 10 Chou, P. C., McNamee, B. M. & Chou, D. K.: The Yield Criterion of Laminated Media. *J. Composite Materials*, Vol. 7, pp. 22 - 35.
  - 11 Hahn, H. T. & Tsai, S. W.: Nonlinear Elastic Behaviour of Unidirectional Composite Laminae. *J. Composite Materials*, Vol. 7, pp. 102 - 118.

- 73.12 Pipes, R. B. & Cole, B. W.: On the Off-Axis Strength Test for Anisotropic Materials. *J. Composite Materials*, Vol. 7, pp. 246 - 256.
- 13 Huang, W.-C.: Elastoplastic Transverse Properties of a Unidirectional Fibre Reinforced Composite. *J. Composite Materials*, Vol. 7, pp. 482 - 498.
- 14 Dharmarajan, S. & McCutchen, jr., H.: Shear Coefficients for Orthotropic Beams. *J. Composite Materials*, Vol. 7, pp. 530 - 535.
- 74.01 Gurtin, Morton E.: A short proof of the representation theorem for isotropic, linear stress-strain relations. *Journal of Elasticity*, Vol. 4, No. 3, pp. 243 - 245.
- 2 Rivlin, R. S.: The Elements of Non-linear Continuum Mechanics. i »Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics» (ed. P. Thoft-Christensen) Reidel, 1974, pp. 151 - 175.
- 3 Rogers, T. G.: Anisotropic Elastic and Plastic Materials i »Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics» (ed. P. Thoft-Christensen) Reidel, 1975, pp. 177 - 200.
- 4 Spencer, A. J. M.: Boundary Layers in Highly Anisotropic Plane Elasticity. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 10, pp. 1103 - 1123 (89, 94, 95)
- 5 Pipkin, A. C.: Generalized Plane Deformations of Ideal Fiber-reinforced Materials. *Quart. Appl. Math.*, Vol. XXXII, pp. 253 - 263. (89)
- 6 Thomas, J. N. & England, A. H.: The Stress Boundary Value Problem for an Ideal Fibre-reinforced Rectangular Plate with a Hole. *J. Inst. Maths. Applies* (1974) 14, 347 - 374.
- 7 Spencer, A. J. M.: Dynamics of Ideal Fibre-reinforced Rigid-Plastic Beams. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 22, pp. 147 - 159.
- 8 Zweben, C.: Failure Analysis of Unidirectional Fiber Composites under Combined Axial Tension and Shear. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 22, pp. 193 - 215.
- 9 Pipkin, A. C.: Finite Deformations of Ideal Fiber-Reinforced Composites i »Composite Materials» (ed. Broutman, L. P. & Krock, R. H.). Vol. 2: Mechanics of Composite Materials (ed. Sendekyj, G. P.) pp. 251 - 308, Academic Press, N.Y. & London.
- 10 Kiral, E. & Smith, G. F.: On the constitutive relations for anisotropic materials - Triclinic, monoclinic, rhombic, tetragonal and hexagonal crystal systems. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 12, pp. 471 - 490.

- 74.11 Horgan, C. O.: The axisymmetric end problem for transversely isotropic circular cylinders. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 10, pp. 837 - 852. (95)
- 12 Padovan, J.: Solution for Inplane and Bending Fields of Tapered Anisotropic Conical Shells. *AIAA Journal*, Vol. 12, pp. 101 - 103.
- 13 Jones, R. M.: Stiffness of Orthotropic Materials and Laminated Fiber-Reinforced Composites. *AIAA Journal*, Vol. 12, pp. 112 - 114.
- 14 Hayes, M. & Horgan, C. O.: On the Dirichlet problem for incompressible elastic materials. *Journal of Elasticity*, Vol. 4, pp. 17 - 25.
- 15 Hayes, M. & Horgan, C. O.: On the displacement boundary-value problem for inextensible elastic materials. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 27, pp. 287 - 297.
- 16 Wu, E.: Phenomenological Anisotropic Failure Criterion. i » Composite Materials» (ed. Broutman, L. J. & Krock, R. H.). Vol. 2: Mechanics of Composite Materials (ed. Sendeckyj, G. P.), pp. 353 - 431, Academic Press, N. Y. & London. (85)
- 17 Pipkin, A. C. & Sanchez, V. M.: Existence of Solutions of Plane Fraction Problems for Ideal Composites. *SIAM, J. Appl. Math.*, Vol. 26, pp. 213 - 220.
- 18 Kasperkiewicz, J. & Skarendahl, A.: Bibliography on fibre reinforced and polymer impregnated cement based composites. *CBI forskning/research* 1 : 74, 36 sider.
- 75.01 England, A. H.: An inclusion in a strong anisotropic material. *Journal of Elasticity*, Vol. 5, pp. 259 - 271. (95)
- 2 Spencer, A. J. M., Moss, R. L. & Rogers, T. G.: Pure bending of helically wound ideal fibre-reinforced cylinders. *Journal of Elasticity*, Vol. 5, pp. 287 - 296.
- 3 Weitsman, Y. & Aboudi, J.: Stress Functions for Fiber-Reinforced Materials and the Effects of Fiber-Inextensibility. *Israel Journal of Technology*, Vol. 13, pp. 39 - 45.
- 4 Naghdi, P. M. & Trapp, J. A.: Restrictions on Constitutive Equations of Finitely Deformed Elastic-Plastic Materials. *Q. Jl. Mech. Appl. Meth.*, Vol. XXVIII, Pt. 1, pp. 25 - 46.
- 5 Pipkin, A. C.: Finite Axisymmetric Deformations of Ideal Fibre-Reinforced Composites. *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, Vol. XXVIII, Pt. 3, pp. 271 - 284. (89)
- 6 Sendeckyj, G. P.: Some Topics in Anisotropic Elasticity i » Composite Materials» (ed. Broutman, L. J. & Krock, R. H.), Vol. 7, Structural Design and Analysis (ed. Chamis, C. C.), pp. 1 - 50, Academic Press, N.Y., SF, L. (44)

- 75.07 Shuhubi, E. S.: 2. Thermoelastic Solids i »Continuum Physics», Vol. II, (ed. A. C. Eringen), Academic Press, pp. 174 - 265.
- 8 Kafadar, C. B.: 1. Exact Solutions in Fluids and Solids i »Continuum Physics», Vol. II, (ed. A. C. Eringen), Academic Press, pp. 407 - 448. (118, 119)
- 9 Prabhakaran, R.: Strain-Optic Law for Orthotropic Model Materials. AIAA Journal, Vol. 13, pp. 723 - 728.
- 10 Rogers, T. G.: Finite Deformation of Strongly Anisotropic Materials i »Theoretical Rheology», (ed. J. F. Hutton, J. R. A. Pearson & K. Walters). Applied Science Publishers Ltd., London, pp. 141 - 168. (89)
- 11 Jones, R. M.: Mechanics of Composite Materials. Scripta Book Company, Washington, 365 sider. (62, 67)
- 12 Hayes, M. A. & Horgan, C. O.: On Mixed Boundary-value Problems for Inextensible Elastic Materials, ZAMP, Vol. 26, pp. 261 - 272.
- 13 Boehler, J.-P.: Sur les Formes Invariantes dans le Sous-Groupe Orthotrope de Révolution des Transformation Orthogonales de la Relation Entre Deux Tenseurs Symétriques du Second Ordre. ZAMM, Vol. 55, pp. 609 - 611.
- 76.01 Troitsky, M. S.: Stiffened Plates, Bending, Stability and Vibrations. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- 2 Nielsen, M. P.: Kontinuummekanik (Mekanik 0.3), Lyngby, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, 334 sider.
- 3 Rivlin, R. S.: The Application of the Theory of Invariants to the Study of Constitutive Equations i »Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics» (ed. Gaetano Fichera), Pitman Publishing, London, pp. 299 - 310.
- 4 Smith, G. F.: On Some Invariant-Theoretic Problems of Continuum Mechanics i »Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics» (ed. Gaetano Fichera), Pitman Publishing, London, pp. 365 - 383.
- 5 Jones, N.: Dynamic Behavior of Ideal Fiber-Reinforced Rigid-Plastic Beams. J. Appl. Mech., Vol. 43, pp. 319 - 324.
- 6 Martin, S. E. & Carlson, D. E.: A note on Ericksen's problem. J. Elasticity, Vol. 6, pp. 105 - 108.
- 7 Pipkin, A. C.: Constraints in linear elastic materials. J. Elasticity, Vol. 6, pp. 179 - 193.
- 8 Aifantis, E. C. & Beskos, D. E.: Dynamic universal solutions for fiber-reinforced incompressible isotropic elastic materials. J. Elasticity, Vol. 6, pp. 353 - 367. (119)

- 76.09 Li, Y.: The Anisotropic Behavior of Poisson's Ratio, Young's Modulus and Shear Modulus in Hexagonal Materials. *Physica status solidi (a)*, Vol. 38, pp. 171 - 175.
- 10 Arridge, R. G. C. & Folkes, M. J.: Effect of sample geometry on the measurement of mechanical properties of anisotropic materials. *Polymer*, Vol. 17, pp. 495 - 500.
- 11 Mansfield, E. H. & Best, D. R.: The Concept of Load Diffusion Length in Fibre Reinforced Composites. Aeronautical Research Council Current Paper No. 1338, London: Her Majesty's Stationery Office, pp. 1 - 17 + 6 fig.
- 12 Boehler, J. P. & Sawczuk, A.: Application of Representation Theorems to Describe Yielding of Transversely Isotropic Solids. *Mech. Res. Comm.*, Vol. 3, pp. 277 - 283.
- 13 Lee, D. A.: The Plane-Stress Boundary-Value Problem for a Material Reinforced by Two Families of Strong Fibres. *Q. Jl. Mech. Appl. Math.*, Vol. 29, pp. 277 - 293.
- 77.01 Marti, P. & Thürlimann, B.: Fließbedingung für Stahlbeton mit Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit. *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 72, pp. 7 - 12. (80)
- 2 van Cauwelaert, F.: Coefficients of Deformation of an Anisotropic Body. *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol. 103, pp. 823 - 835.
- 3 Shaw, L. & Spencer, A. J. M.: Impulsive Loading of Ideal Fibre-Reinforced Rigid-Plastic Beams. I. Free Beam under Central Impact, pp. 823 - 831. II. Beam with End Supports, pp. 833 - 844. III. Cantilever Beam, pp. 845 - 854. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 13.
- 4 Sawyers, K. N.: On the possible values of the strain invariants for isochoric deformations. *J. Elasticity*, Vol. 7, pp. 99 - 102.
- 5 Choi, I. & Horgan, C. O.: Saint-Venant's Principle and End Effects in Anisotropic Elasticity. *J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 424 - 430. (95)
- 6 Johnson, A. F.: Creep characterization of transversely-isotropic metallic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 25, pp. 117 - 126.
- 7 Pipkin, A. C.: Finite Deformations in Materials Reinforced with Inextensible Cords i »Finite Elasticity« (ed. R. S. Rivlin), ASME, AMD-Vol. 27, New York, pp. 91 - 102.
- 8 Willis, J. R.: Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 25, pp. 185 - 202.
- 9 Avramidis, I. E.: Stoffgleichungen nach der Theorie zweiter und erster Ordnung für hyperelastische faserverstärkte Werkstoffe mit inneren Zwangsbedingungen. *Ingenieur-Archiv*, Bd. 46, pp. 261 - 269.
- 10 Boehler, J.-P.: On Irreducible Representations for Isotropic Scalar Functions. *ZAMM*, Vol. 57, pp. 323 - 327.



- 77.11 Lo, K. H., Christensen, R. M. & Wu, E. M.: A High-Order Theory of Plate Deformation. Part 1: Homogeneous Plates, pp. 663 - 668. Part 2: Laminated Plates, pp. 669 - 676. J. Appl. Mech., Vol. 44.
- 12 Spencer, A. J. M.: Simple methods of stress analysis for highly anisotropic materials i »Fibre reinforced materials: design & engineering applications». Institution of Civil Engineers, London, pp. 21 - 27.
- 13 Rogers, T. G.: Deformations of strongly anisotropic materials. Rheol. Acta, Vol. 16, pp. 123 - 133.
- 14 Nielsen, M. P., Hansen, L. Pilegaard & Rathkjen, A.: Rumlige Spændings- og Deformationstilstande, Mekanik 2.2, Del 1 & 2, Aalborg/København, 696 sider. (67, 117)
- 15 Ottosen, N. S.: A Failure Criterion for Concrete. J. Engng. Mech. Div., Vol. 103, pp. 527 - 535.
- 78.01 Krenchel, H.: Fiberarmering, ABK, DtH, F 67, pp. 1 - 57.
- 2 Schulgasser, K.: Coefficients of Deformation of an Anisotropic Body. J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 104, pp. 1304 - 1306.
- 3 Seide, P.: Coefficients of Deformation of an Anisotropic Body. J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 104, p. 513.
- 4 Smith, G. F. & Kiral, E.: Anisotropic Constitutive Equations and Schur's Lemma. Int. J. Engng. Sci, Vol. 16, pp. 773 - 780.
- 5 Beatty, M. F.: General Solutions in the Equilibrium Theory of Inextensible Elastic Materials. Acta Mechanica, Vol. 29, pp. 119 - 126.
- 6 Rogers, T. G. & Spencer, A. J. M.: Singular Stress Layers in Ideal Fibre-reinforced Cylinders. ZAMP, Vol. 29, pp. 237 - 244.
- 7 Tewary, V. K.: Mechanics of Fibre Composites. Wiley Eastern Ltd., New Delhi, pp. 1 - 228.
- 8 Nielsen, M. P., Rathkjen, A. & Hansen, L. Pilegaard: Rapport vedr. Brudbetingelse for Træ. København-Aalborg. (89)
- 79.01 van Cauwelaert, F.: Coefficients of Deformation of an Anisotropic Body. J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 105, pp. 482 - 484.
- 2 Rasmussen, S. Højlund: Optimering af fiberforstærkede konstruktioner. DCAMM, Rapport Nr. S 12, DtH, 127 sider. (58)
- 3 Hashin, Z.: Analysis of Properties of Fiber Composites with Anisotropic Constituents. J. Appl. Mech., Vol. 46, pp. 543 - 550.
- 4 Boehler, J.-P.: A Simple Derivation of Representations for Non-Polynomial Constitutive Equations in Some Cases of Anisotropy. ZAMM, 59, pp. 157 - 167.

- 79.05 Cowin, S. C.: On the Strength Anisotropy of Bone and Wood. J. Appl. Mech., Vol. 46, pp. 832 - 838.
- 6 Kurashige, M.: Instability of a Fiber-Reinforced Elastic Slab Subjected to Axial Loads. J. Appl. Mech., Vol. 46, pp. 839 - 843.
- 7 Storåkers, B.: Yield Surface Characteristics Arising from Orthorhombic Symmetry. J. Appl. Mech., Vol. 46, pp. 961 - 962.
- 8 Rathkjen, A.: Brudbetingelser for træ. Nordisk Trätidsskrift, hæfte nr. 6, pp. 375 - 382. (77)
- 9 Marti, P.: Plastic Analysis of Reinforced Concrete Shear Walls i »Plasticity in Reinforced Concrete«, Introductory Report, IABSE Colloquium, København 1979, pp. 51 - 69. (80)
- 10 Pipkin, A. C.: Stress Analysis for Fiber-Reinforced Materials. Advances in Applied Mechanics, Vol. 19 (ed. Chia-Shun Yih), Academic Press, New York, pp. 1 - 51.
- 11 Pedersen, O. B.: Teorier om kompositters deformation i »Materialnyt nr. 5: 79, Fiberforstærkede materialer«, udg. af Dansk Selskab for Materialprøvning og -forskning, pp. 3 - 14.
- 12 Talreja, R.: Laminatberegninger i »Materialnyt nr. 5: 79, Fiberforstærkede materialer«, udg. af Dansk Selskab for Materialprøvning og -forskning, pp. 15 - 28.
- 13 Lilholt, H.: Mekaniske og fysiske egenskaber af fiberkompositer i »Materialnyt nr. 5: 79, Fiberforstærkede materialer«, udg. af Dansk Selskab for Materialprøvning og -forskning, pp. 29 - 40.
- 14 Krenchel, H.: Fiberarmeret cement og beton i »Materialnyt 5: 79, Fiberforstærkede materialer«, udg. af Dansk Selskab for Materialprøvning og -forskning, pp. 53 - 63.
- 80.01 Sayir, M.: Flexural Vibrations of Strongly Anisotropic Beams. Ing.-Archiv, Vol. 49, pp. 309 - 323.
- 2 Rivlin, R. S.: Material Symmetry and Constitutive Equations. Ing.-Archiv, Vol. 49, pp. 325 - 336.
- 3 Rathkjen, A.: Differensligninger for rektangulære skiver af lineærelastisk, anisotropt materiale. AUC, Inst. f. Bygningsteknik, Rapport nr. 8012, 39 sider. (49)

## STIKORDSREGISTER

- Armerede materialer, 53 - 96  
 Armeringsforhold, 53  
 Armeringsretninger, 53  
 Basisinvarianter, 24, 26 - 42  
 Beton, 2  
 Blandingslov, 63  
 Brud- og flydebetingelser, 67 - 89  
 Cauchy-relationer, 1, 58  
 Coulomb-materiale, 72  
 Deviationsspændinger, 74  
 Differensligninger, 49  
 Drejninger, 7, 19  
 Eftergivelihoodstensor, 44  
 Ekstraspændinger, 95, 96  
 Enakset stræk, 89  
 Enakset tryk, 87  
 Enakset træk, 45, 89  
 Flydebetingelser, 24, 117  
 Forminvarians, 25, 26, 31, 37  
 Forskydning, 46, 89  
 Frembringertransformationer, 18, 19  
 Hankinsons brudbetingelse, 84, 87  
 Hills brudbetingelse, 84  
 Homogene spændinger, 44, 50  
 Homogenitet, 3, 17, 54  
 Hovedinvarianter, 24, 34, 38, 40, 68, 73, 139  
 Hydrostatisk tryk, 46, 89, 92, 115  
 Ideale fiberarmerede materialer, 89 - 96  
 Ikke-lineære tensorrelationer, 24 - 42  
 Indre bindinger, 89, 113  
 Inversion, 16  
 Isotropi, 3, 11, 24  
 Isotrope tensorer, 11, 20  
 Jacobys brudbetingelse, 83, 87, 89  
 Komplekse akser, 24, 25, 126  
 Kompleks funktionsteori, 44, 47, 48  
 Kompositmaterialer, 53  
 Kontrollable deformationer, 52, 118  
 Krumliniet anisotropi, 17, 54  
 Krystalklasser, 1, 3, 18, 20  
 Krystalsystemer, 3, 18, 19, 39  
 Krystaltyper, 3  
 Lineære tensorrelationer, 4 - 24  
 Lineær-elastiske materialer, 4, 43 - 52, 56 - 67, 120  
 Materialesymmetri, 3 - 42  
 Matrixformulering, 6, 8  
 Matrixmateriale, 53, 68  
 v. Mises-materiale, 68, 87  
 Ortogonal armering, 71, 80, 87, 91  
 Ortotropi, 17, 50  
 Plane deformationstilstande, 91, 95, 96, 123  
 Plane spændingstilstande, 74, 95, 121  
 Reaktionsspændinger, 95, 96, 114  
 Reducerede stivheder, 60, 121  
 Refleksioner, 16  
 Retliniet anisotropi, 17, 54  
 Rotation, 16, 19  
 Saint-Venants princip, 95  
 Spændingsfunktion, 49, 110  
 Stivhedstensor, 44  
 Stringere, 94  
 Stüssis brudbetingelse, 84, 89  
 Symmetridrejninger, 3, 7, 8, 11, 12, 14  
 Symmetrigrupper, 8, 14, 15, 18, 128  
 Symmetrioperationer, 7, 16  
 Symmetrirelationer, 8, 9, 11 - 16, 128  
 Transvers isotropi, 11, 62, 92  
 Tresca-materiale, 74  
 Træ, 2, 89  
 Usammentrykkelighed, 89, 91, 95, 114  
 Ustrækkelighed, 89, 91, 94, 95, 115



